

平成 21 年 6 月 1 日現在

研究種目： 基盤研究（C）

研究期間： 2006～2008

課題番号： 18540161

研究課題名（和文）非線形波動方程式の孤立波解の安定性と解の爆発に関する研究

研究課題名（英文）STUDIES ON STABILITY OF SOLITARY WAVES AND BLOWUP OF SOLUTIONS FOR NONLINEAR WAVE EQUATIONS

研究代表者

太田 雅人 (OHTA MASAHIRO)

埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号： 00291394

研究成果の概要： 消散項をもつ非線形シュレディンガー方程式の爆発問題に関して、テネシー大学の Grozdna Todorova 氏と共同研究を行った。また、湯川型相互作用をもつ空間 3 次元のクライン・ゴールドン・シュレディンガー方程式系の定在波解の安定性について、菊池弘明氏と共同研究を行った。さらに、3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系の孤立波解の安定性に関して、ボルドー大学の Mathieu Colin 氏、Thierry Colin 氏と共同研究を行った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	600,000	3,700,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 非線形シュレディンガー方程式、非線形クライン・ゴールドン方程式、定在波解、非線形波動、安定性解析、爆発問題

1. 研究開始当初の背景

非線形シュレディンガー方程式や非線形クライン・ゴールドン方程式は、非線形場を記述する基礎方程式として、物理学や工学において重要であるのみならず、数学的にも興味深い問題を含み、様々な観点から研究されている。そのような方程式の解の中で、定在波解や進行波解など、空間的に局在化し、時間がたっても形状の変わらない孤立波解は、方程式が記述する物理現象と密接に関連する特

微的な解として、特に重要な特殊解である。数学的には、孤立波解の存在及びその安定性を調べるのが基本的な問題である。軌道安定な孤立波解の近くから出発した解は、常にその孤立波解の軌道の近くに留まっているため、時間発展による解の挙動は比較的明快である。それに対して、軌道不安定な孤立波解の近くから出発した解は、時間経過に伴い、その孤立波解の軌道から離れていくため、その後の解の挙動には様々な可能性があり得

る。特に、孤立波解のどんな近くにも有限時間で爆発する解が存在する場合は、軌道不安定性よりも強い不安定性を意味し興味深い。また、爆発解の解析には、孤立波解が重要な役割を果たし、孤立波解の安定性と解の爆発問題を総合的に研究することは重要であると考ええる。

2. 研究の目的

上記の背景の下、本研究の具体的な目的として下記3項目を挙げた。

(1) ポテンシャルを伴う非線形シュレディンガー方程式の定在波解の安定性に関して、個別のポテンシャルの特性、特に、シュレディンガー作用素のスペクトルの性質と孤立波解の安定性の関係を明らかにしたい。たとえば、空間的に周期的なポテンシャルやある方向に退化した調和ポテンシャルを伴う場合の定在波解の安定性を調べたい。

(2) 孤立波解の安定性に関する既知の結果の多くは、基底状態（最小作用解）に対するものである。直感的には、励起状態はすべて不安定であると思われるが、このことを数学的に証明したい。特に、第1段階の目標として、非線形クライン・ゴールドン方程式に対して、基底状態がすべて爆発不安定である場合に、励起状態の爆発不安定性を示したい。

(3) シュレディンガー方程式と波動方程式の非線形連立方程式系の具体例として、レーザーとプラズマの相互作用を記述するザハロフ型の準線形連立方程式系に対して、その孤立波解の構造と安定性を調べたい。

3. 研究の方法

(1) 国内の大学（北海道大学、東北大学、東京大学、首都大学東京、東海大学、大阪大学、京都大学、広島大学、九州大学）で開催された研究会や学会に積極的に参加し、情報収集や研究打合せを行なった。

(2) ボルドー大学（フランス）に出張し、**Mathieu Colin** 氏及び **Thierry Colin** 氏と共同研究を行なった。また、テネシー大学（アメリカ合衆国）に出張し、**Grozdena Todorova** 氏と共同研究を行なった。

(3) 連携研究者と共同で、埼玉大学において「解析ゼミ」を定期的に開催し、国内外の研究者を招聘し（2006年度は8名、2007年度は6名、2008年度は14名）意見交換を行な

った。

(4) 解析学関連、数理解物理関連の図書や学術雑誌のバックナンバーを購入し、本研究に必要な文献を揃えた。

4. 研究成果

(1) デルタ関数をポテンシャルにもつ非線形シュレディンガー方程式の定在波解の安定性について、まず、ポテンシャルと非線形項がともに引力的な場合に、福泉麗佳氏及び小澤徹氏と共同研究により、定在波の変分的特徴づけ及び最小化列のコンパクト性を用いて、定在波解の安定性と不安定性を示した。また、ポテンシャルが引力的で、非線形項が斥力的な場合に、神永正博氏との共同研究により、定在波解の安定性を示した。

(2) 消散項を含む非線形シュレディンガー方程式について **Grozdena Todorova** 氏との共同研究を行なった。初期値に応じて消散係数を十分大きくとれば、解が時間大域的に存在することを証明した。また、非線形項が優臨界で、消散係数が十分小さい場合には、非消散的な場合に知られているものと同じ条件の下で、解が有限時間で爆発することを証明した。

(3) レーザーとプラズマの相互作用を記述するザハロフ型の準線形連立方程式系を簡略化した、3波共鳴相互作用項を含む非線形シュレディンガー方程式系の定在波解の軌道安定性と不安定性について、ボルドー大学の **Mathieu Colin** 氏及び **Thierry Colin** 氏と共同研究を行なった。単独の非線形シュレディンガー方程式の安定な定在波解から作られる、3波共鳴相互作用項を含む方程式系の半自明な定在波解に関して、3波共鳴相互作用係数が大きくなると不安定化することを証明した。

(4) 湯川型相互作用をもつ空間3次元のクライン・ゴールドン・シュレディンガー方程式系の定在波解の軌道安定性と不安定性について菊池弘明氏と共同研究を行なった。振動数が十分大きい場合には、定在波解は軌道安定であり、逆に、振動数が十分小さい場合には、定在波解は不安定であることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① Hiroaki Kikuchi and Masahito Ohta, Instability of standing waves for the Klein-Gordon-Schrödinger system, Hokkaido Mathematical Journal **37** (2008), 735--748. 査読有
- ② Reika Fukuizumi, Masahito Ohta and Tohru Ozawa, Nonlinear Schrödinger equation with a point defect, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **25** (2008), 837--845. 査読有
- ③ Yue Liu and Masahito Ohta, Stability of solitary waves for the Ostrovsky equation, Proceedings of the American Mathematical Society **136** (2008), 511--517. 査読有
- ④ Yue Liu, Masahito Ohta and Grozdna Todorova, Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations and solitary waves for generalized Boussinesq equations, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **24** (2007), 539--548. 査読有
- ⑤ Munemitsu Hirose and Masahito Ohta, Uniqueness of positive solutions to scalar field equations with harmonic potential, Funkcialaj Ekvacioj **50** (2007), 67--100. 査読有
- ⑥ Masahito Ohta and Grozdna Todorova, Strong instability of standing waves for the nonlinear Klein-Gordon equation and the Klein-Gordon-Zakharov system, SIAM Journal on Mathematical Analysis **38** (2007), 1912--1931. 査読有
- ⑦ Hideo Kubo and Masahito Ohta, Blowup for systems of semilinear wave equations in two space dimensions, Hokkaido Mathematical Journal **35** (2006), 697--717. 査読有
- ⑧ Mathieu Colin and Masahito Ohta, Stability of solitary waves for derivative nonlinear Schrödinger equation, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **23** (2006), 753--764. 査読有

[学会発表] (計 8 件)

- ① 太田 雅人, 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系の定在波解の不安定性, 日本数学会 2009 年度年会, 東京大学, 2009 年 3 月 29 日.
- ② Masahito Ohta, Instability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three-wave interaction, Nagoya Workshop on Differential Equations, 名古屋大学, 2009 年 2 月 3 日.
- ③ Masahito Ohta, Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, Workshop "Asymptotics and Singularities in Nonlinear and Geometric Dispersive Equations", Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery, Canada, 2008 年 8 月 27 日.
- ④ Masahito Ohta, Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, Nonlinear Wave and Dispersive Equations, 京都大学, 2008 年 1 月 23 日.
- ⑤ Masahito Ohta, Stability of ground states for nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction, Nonlinear Wave Equations, 北海道大学, 2007 年 8 月 29 日.
- ⑥ 太田 雅人, Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a delta function potential, 発展方程式シンポジウム, 東海大学, 2007 年 3 月 10 日.
- ⑦ Masahito Ohta, Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a delta function potential, Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 22, "Nonlinear Wave Equations", 札幌天神山国際ゲストハウス, 2006 年 11 月 20 日.
- ⑧ Masahito Ohta, Global existence for damped nonlinear Schrödinger equations, The 6th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, Université de Poitiers, France, 2006 年 6 月 26 日.

[その他]

ホームページ

<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/MasahitoOhta.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

太田 雅人 (OHTA MASAHIITO)
埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：00291394

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

小池 茂昭 (KOIKE SHIGEAKI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：90205295

長澤 壯之 (NAGASAWA TAKEYUKI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：70202223

町原 秀二 (MACHIYARA SHUJI)
埼玉大学・教育学部・准教授
研究者番号：20346373