

平成 21年 4月 3日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540175

研究課題名（和文）無限次元空間上の確率解析と準古典的問題

研究課題名（英文）Stochastic analysis and semi-classical problems
on infinite dimensional spaces

研究代表者

會田 茂樹（AIDA SHIGEKI）

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：90222455

研究成果の概要：

研究成果としては

(1) ウィーナー空間内の領域で定義されたホッジ・小平型作用素の研究

(2)無限次元空間上のシュレーディンガー作用素の最小固有値の準古典極限の研究
の二つがある。(1)ではウィーナー空間内のある非凸領域でのポアンカレの補題の証明のため、凸領域で定義されたホッジ・小平型作用素のアダマール変分を用いるアイデアを提起した。(2)では、コンパクトリーマン多様体のパス空間上のシュレーディンガー作用素と場の量子論に現れる $P(\phi)$ 型のハミルトニアンの最小固有値の準古典極限を決定した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,400,000	0	1,400,000
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	630,000	4,130,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：準古典極限、確率解析、シュレーディンガー作用素、場の量子論、ループ空間
無限次元解析

1. 研究開始当初の背景

コンパクト多様体上の微分形式の空間に作用するホッジ・小平作用素をモース関数で変形した Witten ラプラシアンのスペクトル（とくにその低いエネルギー部分）の準古典極限の漸近挙動からモース不等式が証明されるのはよく知られている。またそのトンネル効果を考慮したホモロジーの構成は無限次元空間にも拡張され Floer ホモロジーの構成な

ど多くの有用な結果が得られている。しかし、無限次元における Witten ラプラシアンのスペクトルの研究はその定義自身も含めて、あまり進んでいない。また、無限次元空間上の自然なシュレーディンガー作用素とも言うべき $P(\phi)$ 型ハミルトニアンの準古典解析も手付かずのまま残っている。本研究は無限次元空間での準古典解析の基礎を固め、幾何、解析への応用を目論んで

開始したものである。

2. 研究の目的

本研究は、上記の現状を考慮して

- (1) ループ空間上のブラウン運動の測度に基づく Ornstein-Uhlenbeck 作用素、シュレーディンガー型作用素のスペクトル解析
- (2) 構成的場の量子論で典型的な $P(\phi)$ 型ハミルトニアン²のスペクトルの準古典解析
- (3) 以上二つの研究を遂行するための確率解析の基礎部分の研究を行うものである。

3. 研究の方法

(1) コンパクトリーマン多様体上のパス空間上のシュレーディンガー型作用素の研究では、ラフパス解析を用いる。その理由は確率微分方程式の解の解析が必要になるが、これが通常の位相では不連続だがラフパスの位相では連続であることによる。変数係数の準古典極限ではそれを定数係数の作用素で近似する必要があるが、この問題も同じ理由で自明では無く、こちらの方がより深刻な問題である。この問題はやはりラフパス解析と近似グランドステイトによる変換で解決した。

(2) $P(\phi)$ 型ハミルトニアン²の研究では確率微分方程式の解のような不連続性は現れないが、ポテンシャル関数が Wick 積による繰り込みで定義されていて、やはり不連続な関数であること、微分作用素の係数作用素がラプラス作用素のような非有界作用素になるため、新たな困難が発生する。この問題を Wiener chaos に対する大偏差原理と係数作用素を下から近似する有界作用素で置き換えたシュレーディンガー作用素を用いることにより解決した。

以上いずれの成果も研究集会やセミナーで発表を繰り返しアイデアを発展させていった。

4. 研究成果

主な発表論文等³に書いた発表論文の成果内容について順番に解説していく。

- (1) この論文では空間が有界区間となっているような時空 2 次元の場合の $P(\phi)_2$ ハミルトニアン²の最小固有値の準古典極限⁴に対応する非線形 Klein-Gordon 方程式におけるポテンシャル関数に対して自然な仮定をおいて決定した。この結果は、場の量子論の自然なモデルにおいて初めてのものである。
- (2) この論文ではコンパクトリーマン多様体の始点、終点を固定したパス空間上で分散(準古典極

限のパラメータ)のパラメータに依存したポテンシャル付き対数ソボレフ不等式を証明した。これは Gross により証明されていた不等式の一般化、精密化である。この不等式はこのパス空間の有界領域で定義されたディリクレ境界条件付の Ornstein-Uhlenbeck 作用素のスペクトルの準古典解析で有用である。この方面の論文も準備中である。

- (3) Wiener 空間の凸集合での Hodge-小平型作用素のスペクトルの下限が正であることは重川により証明されている。これはコホモロジーの消滅を意味する。凸性をはずしてしまうと一般には同じことは言えない。ループ空間で Hodge-小平型作用素を研究するさい、ラフパス解析の視点に立つと反復積分で定義される領域で作用素を考える必要がある。この領域は Wiener 空間の積空間の領域で凸ではない。しかし、一つの成分を固定して得られる切り口は凸領域になるなど著しい性質をもつ。このことと Hodge-小平型作用素の逆作用素のアダマル変分を用いて考えている領域でのポアンカレの補題の研究を行った。この論文ではアイデアのスケッチを述べたので、厳密な論文は準備中である。
- (4) この論文では、コンパクトリーマン多様体のパス空間上のシュレーディンガー作用素の最小固有値の準古典極限を決定した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

(1) Shigeki Aida, Semi-classical limit of the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator on a Wiener space :

II. $P(\phi)_2$ -model on a finite volume, Journal of Functional Analysis, 査読有, Vol. 256, 2009, 3342-3367.

(2) Shigeki Aida, Log-Sobolev inequalities with potential functions on pinned path groups, Communications on Stochastic Analysis, 査読有, Vol. 2, No. 1, 2008, 33-51.

(3) Shigeki Aida, Hadamard's variation and Poincaré's lemma on a certain non-convex

domain, in the Proceedings of RIMS Workshop on Stochastic Analysis and Applications, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B6, 2008, 1-14.

(4) Shigeki Aida, Semi-classical limit of the bottom of spectrum of a Schrödinger operator on a path space over a compact Riemannian manifold, J. Funct. Anal. 査読有, Vol. 251, no.1, 59-121, (2007).

[学会発表] (計 12 件)

(1) 會田茂樹, Semiclassical limit of the lowest eigenvalue of ϕ_2 Hamiltonian on finite volume, 場の理論に動機づけを持つ数学(無限次元確率解析・解析学)の諸問題, 2008年12月23日, 佐賀大学.

(2) 會田茂樹, Semiclassical limit of the lowest eigenvalue of ϕ_2 Hamiltonian on finite volume, 確率論シンポジウム, 2008年12月16日-18日, 東京工業大学.

(3) 會田茂樹, Semiclassical limit of the lowest eigenvalue of ϕ_2 Hamiltonian on finite volume, 確率解析とその周辺, 2008年11月19日-21日, 名古屋大学ベンチャー・ビジネス・ラボラトリー、ベンチャーホール.

(4) 會田茂樹, Semi-classical limit of ϕ_2 -Hamiltonians, German-Japanese symposium, Stochastic analysis and applications, 2008年9月8日-9月12日, Nishijin plaza, Fukuoka, Kyushu, Japan.

(5) 會田茂樹, Rough path analysis, an Introduction, The 1st MSJ-SI, Probabilistic approach to geometry, 2008年7月28日-8月8日 Kyoto, Japan.

(6) 會田茂樹, Semi-classical limit of the bottom of spectrum of a Schrödinger

operator on a path space over a compact Riemannian manifold, Stochastic Problems and Nonlinear PDEs, 2007年12月3日, 京都大学理学研究科.

(7) 會田茂樹, 凸領域上のGreen作用素のアダマール変分とある非凸領域上のポアンカレの補題, 確率論と幾何学, 2007年10月19日-21日, 熊本大学.

(8) 會田茂樹, Hadamard's variation and Poincaré's lemma on a certain non-convex domain, 10月7日-14日: Stochastic calculus on manifolds, graphs, and random structures, 2007年10月7日-14日, Hausdorff research institute for mathematics, Bonn, Germany.

(9) 會田茂樹, Hadamard's variation and Poincaré's lemma on a certain non-convex domain, Dirichlet forms, stochastic analysis and interacting systems (German-Japanese cooperation), 2007年9月16日-9月21日 Berlin, Berlin Technical University.

(10) 會田茂樹, Hadamard's variation and Poincaré's lemma on a certain non-convex domain, Stochastic Analysis, Stochastic Differential Geometry and applications, 2007年4月17日-4月23日, Swansea, Wales.

(11) 會田茂樹, Witten Laplacians on pinned path groups, 確率解析とその周辺, 2006年10月25日-27日, 京都大学理学研究科.

(12) 會田茂樹, Semi-classical limit of the bottom of spectrum of a Schrödinger operator on a path space over a compact Riemannian manifold, 9月20日-23日: Probability and geometry(ドイツ数学会ミ

ニシンポジウム), 2006年9月20日-23日,
Bonn大学, ドイツ.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

會田 茂樹(Aida Shigeki)
大阪大学・基礎工学研究科・教授
研究者番号: 90222455

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

日野 正訓(Hino Masanori)
京都大学・情報学研究科・准教授
研究者番号: 40303888

桑江 一洋(Kuwae Kazuhiro)
熊本大学・工学部・教授
研究者番号: 80243814

廣島 文生(Hiroshima Fumio)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号: 00330358

吉田 伸生(Yoshida Nobuo)
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 40240303

数見 哲也(Kazumi Tetuya)
大阪府立大学・総合教育機構・准教授
研究者番号: 40224422

長井英生(Nagai Hideo)
大阪大学・基礎工学研究科・教授
研究者番号: 70110848

Kohatsu-Higa Arturo
大阪大学・基礎工学研究科・准教授
研究者番号: 80420412

永幡 幸生(Nagahata Yukio)
大阪大学・基礎工学研究科・助教
研究者番号: 50397725