様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006-2008
課題番号：１８５４０１７９
研究課題名（和文）　リーマン面上の射影構造の研究とその双曲多様体・複素力学系への応用
研究課題名（英文）　Study of projective structures on Riemann surfaces and its applications to hyperbolic manifolds and complex dynamical systems

研究代表者
　中西　敏浩(NAKANISHI TOSHIHIRO)
　島根大学・総合理工学部・教授
　研究者番号００１７２３５４

研究成果の概要：
穴あき曲面のタイヒミュラー空間に導入されたR.C.Pennerの座標系を、複素射影構造のホロノミーが定める曲面群の複素2次特殊射影線形群への表現空間に拡張し、この座標系を用いると写像類群が有理変換のつくる群として表わされることを示した。その結果をクライン群論、円周上の曲面束の構造を持つ3次元多様体の双曲化問題や不定方程式の整数解、写像類群の複素力学系に応用し、多くの興味ある例を得ることができた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,400,000	0	1,400,000
２００７年度	500,000	150,000	650,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	2,400,000	300,000	2,700,000

研究分野：複素解析学
科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学
キーワード：タイヒミュラー空間、クライン群、リーマン面、射影構造

１．研究開始当初の背景
曲面上の等角構造や射影構造の現代的な変形理論はタイヒミュラー空間の枠組みの中にある。タイヒミュラー空間を理解するための初期作業として，座標系の導入、いわばタイヒミュラー空間の地図作りが必要である。研究者の目的や手法の違いによってこれまで様々な座標系が導入されてきた。有名なものに Fenchel-Nielsen 座標や Bers 埋め込みで定まる座標がある。我々が注目したのは 1987 年に R.C.Penner によって穴あき曲面のタイヒミュラー空間に導入されたラムダ長による座標系である。Penner 座標系の特長は、それによって(a)タイヒミュラー空間を実代数多様体として表現できることと(b)写像類群の作用が有理変換のつくる群となることである。しかしながら Penner 座標系は実解析的に定義されたものであり複素解析学、とくにクライン群論の立場からは、フックス群の変形理論に限定した問題しか取り扱えない、したがって応用範囲が狭いという不満があった。そのため Penner 座標系を上の

(a),(b)のよい性質を保持しながら複素化してリーマン面上の複素射影構造やクライン群論の研究に供与したいというのが研究の動機であった。すでに１点穴あき曲面については研究代表者とフィンランド・ヘルシンキ大学の M.Naatanen 氏との共同研究にとってある程度満足のいく理論を完成させたが、一般の曲面についてはいくつかの困難な点を克服できないでいた。

２．研究の目的

研究開始時の状況に鑑み、一般の穴あき曲面群の SL(2,C)表現の空間、すなわち複素射影構造のホロノミー表現の空間に Penner 座標の複素化といえる座標系を導入することが最大の目的であった。新しい座標系のもとで写像類群が有理変換として作用することが示されれば、いろいろな問題が計算機の数式処理によって「計算可能」となり、元来の複素射影構造の変形理論の研究に新しい手法を導入し、さらに３次元双曲多様体や多変数の複素力学系への応用を開くことができる。一例として円周上の曲面束の構造を持つ３次元多様体は、曲面と閉区間との直積空間の端の面を曲面の同相写像を用いて貼り合わせることによって得られる。この多様体が双曲計量を許容するための必要十分条件は貼り合わせに用いた写像が擬アノソフ的であることが Thurston によって証明されている。このことを考慮に入れると，この種の多様体の双曲構造を見つけることと、擬アノソフ的写像類の曲面群の SL(2,C)表現の空間への作用の不動点で忠実かつ離散な表現に対応するものを見つけることとは同値であることがわかる。我々の座標を用いると写像類の有理変換表現が得られることから、不動点を見つける問題を（離散性の判定問題を除いて）代数的方程式を解く問題に帰着する。こうした事実をふまえ任意の穴あき曲面上の複素射影構造の空間上に拡張された Penner 座標を双曲３次元多様体や複素力学系における具体例を構成することを我々の理論の応用面での目的とした。

３．研究の方法

（１）リーマン面上の複素射影構造の空間はさまざまな座標系を許容するが、写像類群の作用の記述を容易なものにする新しい座標系を見いだすため、タイヒミュラー空間に導入された Penner 座標を手本とすることにした。そのため Penner の飾りつきタイヒミュラー空間に関する文献やタイヒミュラー空間の座標系に関する論文、写像類群や曲面群の表現空間，character variety に関する図書や論文を閲読した。また旅費を用いて国内の函数論や双曲多様体の研究者，および海外の共同研究者である Naatanen 氏、フィンランド・ユバスキュラ大学の T.Kuusalo 氏と研究連絡や情報交換を行なった。さらに我々の研究の動機となった理論の創始者である Penner 氏からデンマーク・オーフス大学への招聘を受け，トポロジーセミナーでの発表と研究連絡を行ない、批評と数多くの指摘、助言を得た。双曲多様体や複素力学系への応用については連携研究者（2007 年度までは研究分担者）である作間誠氏と諸澤俊介氏に専門的な知識の提供を受けた。

（2）我々の座標の特色は、クライン群や写像類群に関する事項を計算機による数式処理が可能な形で提示できることである。コンピュータと数式処理ソフトウェア（おもに Mathematica）を用いていろいろな双曲３次元多様体の例を構成した。またいくつかの曲面に関してその写像類群の有理写像表現を計算した。それらは写像類群の力学系の研究に新しい知見を加えるものであると自負している。

４．研究成果

（1）穴あき曲面上の複素射影構造が定めるホロノミーは曲面の基本群の SL(2,C) 表現を定めるが、その表現空間に大域的座標系を導入した。この座標系はタイヒミュラー空間上に R.C.Penner が導入した座標系を複素化したもので、よく利用される行列のトレース関数を変形したものである。

定理　(g,n)型の穴あき曲面の忠実でかつ穴のまわりを周回するループの像がトレース -2 をもつ放物元であるような SL(2,C)表現の空間に大域的座標を導入して、表現空間を 6g-6+3n 次元の複素空間の余次元 n の代数的多様体の中に埋め込むことができる。

この定理で述べられる座標系の特色として曲面群の SL(2,C) 表現に現れる行列の成分が座標の有理関数であることが挙げられる。座標系は曲面の理想三角形分割ごとに一組与えられ、別の理想三角形分割に対応する座標系間の変換が有理写像で表現される。こうして（曲面群のフックス群表現空間としての）タイヒミュラー空間上の Penner 理論をほぼ完全な形で SL(2,C) 表現空間に拡張することができた。

（2）我々の座標系の最大の利点は、すでに繰り返し述べているように写像類群の作用が有理変換で表わされることであり、このことは多くの応用をもつ。この事実の証明には Penner が示した理想プトレマイオスの定理が重要な鍵となる。我々の研究の成果の一つはこの理想的プトレマイオスの定理を SL(2,C)の放物元について証明したことである：

定理 A,B,C,D を SL(2,C)の放物型元とし、どの２つも交換可能でないとする。このとき -AB,-BC,-CD,-DA,-AC,-BD の平方根をそれぞ

れ P,Q,R,S,T,U とすると必要なら符号を変えることにより

trPtrR+trQtrS=trTtrU

が成り立つ。

この結果は初等幾何でよく知られているプトレマイオスの定理を複素数の世界に移植したものと解釈すると非常に興味深い。また Penner の双曲空間における解析幾何学的証明とは違い、純代数的な定理の証明を与えることができた。表現空間に写像類群が有理変換として作用することにより双曲 3 次元多様体や複素力学系、不定方程式への整数解の応用することができる。研究目的の欄で円周上の曲面束構造を持つ 3 次元多様体の双曲化の問題を代数的方程式を解くことに帰着できることを述べた。複素力学系への応用については多変数の有理写像の反復合成について興味深い例を提供する。離散表現のつくる部分空間には写像類は不連続に作用しているからファトゥー集合が空でないことがわかる。

(3) 写像類群を表わす有理変換群は (1) で述べた SL(2,C) 表現空間が埋め込まれた代数多様体を不変にする。したがってこの代数多様体の有理点集合は写像類群によって保存されることがすぐにわかる。古典的 Markoff 方程式の整数解の理論は 1 点穴あきトーラス群の表現空間とそれに作用する写像類群を用いてこの枠組みで捉えることができる。我々は写像類を表わす有理変換の形を詳細に調べることによって Markoff の結果を一般化した。次の定理では任意の種数の 1 点穴あき曲面を固定して考える。

定理 任意の (g,1) 型の写像類群の元に対して、その 6g-5 次元複素空間の有理変換としての表現の各成分は分母が単項式であり、その単項式の次数より 1 だけ大きい次数をもつ同次式を分子のもつ有理式である。

この定理により SL(2,C) 表現空間が埋め込まれた代数多様体を定義する不定方程式の整数解が無限個存在することが分かる。

技術的な問題から、現時点では 1 点穴あき曲面の場合を扱う定理しか得られていないが一般の場合も扱うための方法は確立している。

(4) 1 点穴あきトーラスのタイヒミュラー空間上で常に定数値となる無限級数が G.McShane によって与えられタイヒミュラー空間やクライン群の理論に大きな影響を与えた。その後 McShane 自身も含め多くの研究者によって彼の恒等式のさまざまな一般化が図られている。その一つに双曲計量をもつ 1 点穴あきトーラス上の２つのワイエルシュトラス点を通る単純閉測地線の長さに関する恒等式がある。我々は２つの単純閉測地線が 1 点のみで交わるとき、その点を通る無限個の単純閉測地線が存在するという T.Jorgensen による観察と Cohen, Metzler および Zimmmermann による単純閉曲線の組合せ群論的特徴づけを用いて McShane の恒等式の一つに別証明を与えることができた。無限小 Birman-Series 集合の 1 次元ルベーグ測度が 0 であることを簡潔に示すことができたのがその証明の一つの特長である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　9　件）

①. <u>T.Nakanishi</u>, An applcation of Penner's coordinates of Teichmuller space of punctured surfeces, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有

②. <u>S.Morosawa</u> and M.Taniguchi, Dynamics of structurally finite entire functions with two singular values, Comput. Methods Funct. Theory, 9 185-198, (2009), 査読有

③. <u>M.Sakuma</u> and K.Shackleton, On the distance between two Seifert surfaces of a knot, to appear in Osaka Journal of Mathematics, 査読有

④. T.Ohtsuki, R.Riley and <u>M.Sakuma</u>, Epimorphisms between 2-bridge knot groups, The Zieschang Gedenkschrift, Geometry and Topology Monograph 14, 417-450 (2008), 査読有

⑤. <u>T.Nakanishi</u>,, A trace identity for parabolic elements of SL(2, C), Kodai Mathematical Journal, 30, 1-18, (2007), 査読有

⑥. <u>S.Morosawa</u>, The parametric space of error functions of the form a¥int_0^z exp(-w^2) dw, Complex Analysis and Potential Theory, Proceedings of the Conference Satellite to ICM 2006, 174-177, (2007) 査読有

⑦. <u>中西敏浩，</u>４つの放物元に関するトレース恒等式について（その２），数理解析研究所講究録 1571・双曲空間のトポロジー、複素解析および数論 193-198 (2007)，査読無

⑧. <u>中西敏浩，</u>４つの放物元に関するトレース恒等式について，数理解析研究所講究録 1518・双曲空間の複素解析と幾何学的研究，160-163 (2006)，査読無

⑨. H.Akiyoshi, H. Miyachi and <u>M. Sakuma</u>, Variations of McShane's identity for punctured surface groups, Proceedings the Workshop "Space of Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds" London Math. Soc., Lecture Note Series 329, 151-185, (2006) 査読有

〔学会発表〕（計 14 件）

① 中西敏浩，穴あき曲面の SL(2,C)-表現空間の座標系とその応用について，第 51 回函数論シンポジウム，2008 年 10 月 12 日，高知大学

② T.Nakanishi, Complexified Penner's coordinates and its applications, Topology Seminar at CTQM, University of Aarhus, 2008 年 4 月 30 日，デンマーク・オーフス

③ M.Sakuma, Punctured torus bundles: Two tessellations of the complex plane, Topology and Geometry Seminar, University of Paul Sabatier, Toulouse, 2008 年 12 月，フランス・ツールーズ

④ M.Sakuma, Punctured torus bundles: Two tessellations of the complex plane, Topology Seminar, University of Automata, Barcelona, 2008 年 12 月，スペイン・バルセロナ

⑤ M.Sakuma, Comparing two tessellations associated with punctured torus bundle over circle, Intelligence of Low Dimensional Topology, 2008 年 10 月 8 日，大阪市立大学

⑥ M.Sakuma, Comparing two tessellations associated with punctured torus bundle over circle, TAPU Workshop, 2008 年 7 月，韓国・釜山大学

⑦ S.Morosawa, Bifurcations of error functions with real coefficients, Aspects of Transcendental Dynamics, Jacob Univeristy ，2008 年 6 月 19 日ドイツ・ブレーメン

⑧ T.Nakanishi, Trace identities and the mapping class group acting on SL(2,C)-representation spaces of punctured surface groups, Workshop on Infinite Dimensional Teichmuller Space and Moduli Space, 2007 年 11 月 22 日，京都大学数学解析研究所

⑨ M.Sakuma, 円周上の穴あきトーラス束の標準分割と Cannon-Thurston 写像，第 50 回函数論シンポジウム，2007 年 10 月 8 日，群馬大学

⑩ T.Nakanishi, Trace functions as coordinates for the SL(2,C)-representation spaces of a punctured surface group, Finland-Japan Joint Seminar on Analysis,Univeristy of Helsinki, 2007 年 8 月 27 日，フィンランド・ヘルシンキ

⑪ S.Morosawa, Dynamics of error functions, The 15th International Conference on Finite and Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2007 年 7 月 31 日，大阪市立大学

⑫ T.Nakanishi, A trace identity involving four parabolic elements of SL(2,C), The Tenth Conference on Real and Complex Analysis, 2006 年 11 月 4 日，広島大学

⑬ M.Sakuma, Geometry and topology of 2-bridge knots, Workshop on Analytic Aspects of Low Dimensional Geometry, Univeristy of Warwick, 2006 年 9 月 8 日，イギリス・ウォーリック

⑭ M.Sakuma, Epimorphisms between 2-bridge knot group from the view of Markoff maps, Intelligence of Low Dimensional Topology, 2006 年 7 月 23 日，広島大学

６．研究組織

(1)研究代表者

中西　敏浩（TOSHIHIRO NAKANISHI）
島根大学・総合理工学部・教授
研究者番号：００１７２３５４

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

作間　誠（MAKOTO SAKUMA）
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：３０１７８６０２

諸澤俊介（SHUNSUKE MOROSAWA）
高知大学・理学部・教授
研究者番号：５０２２０１０８