様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月６日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間： 2006 ～ 2009
課題番号：18540203
研究課題名（和文） ３次元双曲多様体における岩澤予想とその数論への応用

研究課題名（英文） Iwasawa conjecture for a hyperbolic threefold and its application to number theory

研究代表者 杉山 健一（SUGIYAMA KENNICHI）
千葉大学·大学院理学研究科·教授
研究者番号：90206441

研究成果の概要（和文）：我々は、整数論における岩澤予想の幾何学的類似が、体積が有限の双曲３次元多様体上の尖点的なユニタリ局所系について成立することを示した。さらに、そのような局所系に対して、Lichtenbaum 予想の類似も成り立つことを示した。

研究成果の概要（英文）：We have shown a geometric analogy of Iwasawa conjecture, which is one of deep theorem in number theory, holds for a cuspidal unitary local system on a hyperbolic threefold of finite volume. We have also proved a theorem corresponding to Lichtenbaum conjecture.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合 計 |
|---|---|---|---|
| ２００６年度 | 1,100,000 | 0 | 1,100,000 |
| ２００７年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| ２００８年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| ２００９年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 年度 | | | |
| 総 計 | 3,400,000 | 690,000 | 4,090,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学·大域解析学
キーワード：３次元双曲多様体、Ruelle L-関数、特殊値、岩澤理論、Lichtenbaum 予想

１．研究開始当初の背景

(1)整数論における大きな予想として、Birch と Swinnerton-Dyer による予想がある。これは、有理数体上定義された楕円曲線に付随する L-関数の s=1 での振る舞いが、楕円曲線の数論幾何学的な不変量で記述されるであろう、という予想である。その予想の一部として、L-関数の s=1 での位数と楕円曲線の Modell-Weil 群の階数が等しくなるか、という問題が述べられている。この予想の背景を探るために、Tate は有限体上定義された楕円曲面に対して、上記の予想の類似を定式化した。それは、現在 Tate 予想と呼ばれ、代数幾何学における Hodge 予想と並んで、数論的代数幾何学上の最重要問題とされている。

(2) Tate による予想の幾何学的類似の定式化は、楕円曲線 L-関数を代数的に捉え直すことが重要であることを示唆する。また、本来の Birch と Swinnerton-Dyer による予想は、Dedekind ゼータ関数に対して成立する類数公式の非アーベル化と位置づけられている。さらに、ゼータ関数を代数的に捉える理論、

すなわちゼータ関数の特殊値を補完する p-進解析関数（p-進ゼータ関数）を構成する岩澤理論は既に確立されており、楕円曲線の L-関数の s=1 での位数と楕円曲線の Modell-Weil 群の階数が等しくなるかという問題は、岩澤理論においては、岩澤主予想という形で述べられている。岩澤主予想は、最初、保型関数論を用いて Mazur-Wiles により証明され、のちに Kolyvagin により、簡明かつ代数的な証明が与えられた。岩澤理論は円分体に対して展開された理論であったが、これを楕円曲線に適用することにより、Mazur, Swinnerton-Dyer、Mazur-Tate-Teitelbaum は有理数体上定義された楕円曲線に対して p-進 L 関数を定義し、Birch と Swinnerton-Dyer 予想の p-進類似を定式化した。この予想は、幾分弱い形、つまり楕円曲線の Modell-Weil 群の階数は p-進 L 関数の s=1 での位数以下（楕円曲線が p で ordinary good reduction を持つ場合）か、あるいは位数より小さい（楕円曲線が p で split multiplicative reduction を持つ場合）ことが Kolyvagin, Rubin, 加藤により示された。これにより、楕円曲線の L-関数が s=1 で０でない値を取れば、Modell-Weil 群は有限群となることが判明する。しかし、一般の場合は、p-進 L 関数と本来の複素解析 L-関数の関係が良くわからないため、これらの結果が本来の Birch と Swinnerton-Dyer による予想を導くかは現在のところ不明である。

２．研究の目的

本研究の目的は、Birch と Swinnerton-Dyer による予想が正しいと信じられる背景を明らかにすることである。既に説明したように、有限体上定義された楕円曲面を用いた Tate による数論幾何学的なモデルが存在するが、その解析のために彼は Frobenius 写像を用いた。しかし、本来の Birch と Swinnerton-Dyer 予想は有理数体上定式化されているので Frobenius 写像に相当するものは存在しない。一方、岩澤理論は有理数体の円分 p-拡大を用いていて、Frobenius 写像に相当するものを構成している。ここで、そもそも Frobenius 写像の本質は何であろうかという疑問が生じるが、これは、様々な数学者が指摘しているように“離散力学系”と見なすのが妥当である。以上の考察から、ゼータ関数の背景には何らかの力学系の存在が示唆される。我々の目標は、このアイデアを実現すること、すなわち、力学系があからさまに存在しないが、何らかの操作により力学系が発生する幾何学的モデルを構成し、ゼータ関数を定義することである。しかもそれは Riemann ゼータ関数と同様に、解析接続や関数等式、Riemann 仮説等の重要な性質が成り立ち、特殊値の解析が可能なものでなければならない。できればそのモデルに対して岩澤理論の類似が展開され、岩澤主予想が定式化されるものが望ましい。さらに、Birch と Swinnerton-Dyer 予想の類似が定式化され、そこに洗われる不変量が幾何学的に自然に解釈されるものであって欲しい。もし、このようなモデルが数論幾何学とは無縁の分野で作ることができれば、ゼータ関数の背景には力学系が存在し、その性質は出現する分野を問わずに、普遍的であると考えることができる。とくに、もし我々のモデルに対して Birch と Swinnerton-Dyer 予想の類似が定式化され、正しいと証明されれば、本来の予想が正しいであろうと信じるに足る一つの証拠となる。

３．研究の方法

我々の方法を説明する前に、上述の Tate によるモデルを説明する。有限体上定義された滑らかな射影代数曲面が、一般ファイバーが楕円曲線となる、射影代数曲線への写像を持つとき楕円曲面という。楕円曲面が isotrivial でないとすると、その Mordell-Weil 群は有限生成となることが知られている。以下、我々は isotrivial でない楕円曲面のみを扱う。写像に関する相対的１次元 l-進エタールコホモロジーを取ることにより、底空間上の局所系が得られ、L-関数が構成される。Tate は、この関数を有理数体上定義された楕円曲線の L-関数の類似とみなし、局所系に働く Frobenius 写像に対して Grothendieck-Lefshetz 跡公式を用いて解析した。その結果、Mordell-Weil 群の階数は上から L-関数の s=1 での位数により押さえられることを示した。我々は、同様のモデルを複素数体上で考え、L-関数を定義し、性質を調べることを試みた。その際、問題となるのは複素数体には Frobenius 写像が存在しないことである。しかし、Tate のモデルを冷静に振り返ってみると、Frobenius 写像が必要だったのは、l-進コホモロジーに対して Grothendieck-Lefshetz 跡公式を用いるところである。我々は Frobenius 写像のかわりに局所系に働くラプラシアンの熱核を用い、さらに Grothendieck-Lefshetz 跡公式を Selberg 跡公式に置き換えてモデルを解析し、Tate モデルと同様に、Mordell-Weil 群の階数は上から L-関数の s=1 での位数により押さえられることを示した。しかし、残念なことに岩澤予想の類似を定式化することはできなかったが、九州大学の森下教授により研究されている数論的位相幾何学によると、代数曲線の幾何学的な類似はリーマン面ではなく、むしろ３次元多様体であると提唱されている。我々は、このアイデアに従い、モデルを３次元双曲多様体上に構成することを試みた。体積有限の３次元双曲多様体上に、無限遠方で散乱が起こっていないようなユニタリ局所系が与えられたとする。そのような

局所系に対して、上記の複素数体上の楕円曲面の場合と同様に、オイラー積の形でL-関数を定義することができるが、我々は、そのL-関数を、局所系の熱核に対しSelberg跡公式を適用し、また断熱極限をとる操作を用いて解析した。

４．研究成果

X を体積が有限の３次元双曲多様体とし、E をその上のユニタリ局所系とする。E を尖点の近傍に制限すると、ユニタリ直線束の直和に分解するが、すべての尖点の近傍において自明な直和成分が現れないとき、E を尖点的である、と呼ぶことにする。我々は、尖点的なユニタリ局所系について岩澤理論の類似を構成し、岩澤主予想あるいは Birch と Swinnerton-Dyer 予想の類似を定式化し証明した。論文３において、岩澤多項式の幾何学的類似は捩れ Alexander 多項式であることを証明し、岩澤理論の代数的な部分を確立した。また、我々は、整数論におけるL-関数の幾何学における対応物として Ruelle L-関数を採り、論文５、６において、捩れ Alexander 多項式と Ruelle L-関数は、岩澤主予想に述べられる岩澤多項式と p-進ゼータ関数の関係を満たすことを示した。さらに、同論文で Ruelle L-関数について Birch と Swinnerton-Dyer 予想の類似が成立することを証明し、その主要項が Frantz-Reidemeister 捩れで記述されることを示した。この項は、有理数体上定義された楕円曲線の L-関数の elliptic regulator に相当する。このように、岩澤主予想あるいは Birch と Swinnerton-Dyer 予想は整数論を超えて、普遍的に成り立つ原理であることが解った。また、整数論において重要な概念であるオイラー系が３次元双曲多様体についても存在することを明らかにしたのが、論文４である。以上のように、本研究の本来の目標は、Swinnerton-Dyer 予想が正しいと信じられる十分な根拠を幾何学におけるモデルで考察するということであったが、それは十分に達せられたと思われる。また、いくつかの副産物も生まれた。ゼータ関数の研究を進めるうちに、幾何学と整数論の類似性、あるいはそれらの交流を強く認識するようになった。その結果、論文１では、アーベル曲面、K3 曲面あるいは有理曲面上の n 点の Hilbert scheme たちを， n をすべて動かして集めて作られる非連結多様体のコホモロジー上に、幾何学的対応により無限次元リー環の普遍包絡環が作用することを利用し、Hodge あるいは Tate 予想の成立する高次元代数多様体の例を構成した。論文２では、整数論における Galois 群の表現と保型形式との対応、いわゆる Langlands 対応の複素幾何学版において重要な役割を果たす Brylinski-Radon 変換について考察した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

1. K. Sugiyama, On the Hodge conjecture and the Tate conjecture for the Hilbert schemes of an abelian surface, Math.Nach.279, NO.1-2(2006),217-231(査読有).

2. K. Sugiyama , Some remarks on the Brylinski-Radon and the Fourier transforms, J.Funct.Anal.235(2006),543-558(査読有).

3. K. Sugiyama ,An analog of the Iwasawa conjecture for a compact hyperbolic threefold, J.Reine.Angew.Math.613,No.1-2(2007),35-50(査読有).

4. K. Sugiyama , On geometric Iwasawa conjecture from a viewpoint of the arithmetic topology, RIMS Kokyuroku Bessatsu 4(2007),235-247(査読有).

5. K. Sugiyama, On geometric analogues of the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for low dimensional hyperbolic manifolds, Contemporary 84(2009),267-286 (査読有).

6. On geometric analogues of the Iwasawa main conjecture for a hyperbolic threefold, Adv.Stud.in PureMath.55(2009),117-135(査読有).

〔学会発表〕（計８件）

1. K. Sugiyama, A geometric analog of the Iwasawa conjecture for hyperbolic threefolds, MSJ-IHES joint workshop, IHES 研究所、パリ、2006 年 11 月。
2. K. Sugiyama, A geometric analog of the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for hyperbolic threefolds, Spectral Analysis in Geometry and Number Theory, 名古屋大学、2007 年 8 月。
3. K. Sugiyama, A geometric analog of the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for a hyperbolic threefold, Geometry and Quantization, Stekulov 研究所、モスクワ、2007 年 9 月。
4. K. Sugiyama, On special value of Ruelle L-function and a regulator, L-function in Arithmetic and Geometry, SFB478、Munster 大学、ミュンスタ、2008 年 7 月。
5. K. Sugiyama, On a geometric analog of Iwasawa conjecture, 福岡ソフトリサーチパークセンター、2009 年 3 月。
6. K. Sugiyama, On a geometric analog of Iwasawa conjecture, 福岡ソフトリサーチパークセンター、2009 年 3 月。
7. K. Sugiyama, An analogue of Lichtenbaum

conjecture for a hyperbolic threefold, Workshop on Arithmetic Geometry at Tambara、東京大学玉原国際セミナーハウス、2009年5月。

8. K. Su giyama, On an analogy between number theory and hyperbolic geometry, Low dimensional topology and number theory II、東京大学、2010年3月。

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計◇件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

杉山　健一（SUGIYAMA KENNICHI）
千葉大学·大学院理学研究科·教授
研究者番号：90206441

(2)研究分担者

久我　健一（KUGA KENNICHI）
千葉大学·大学院理学研究科·教授
研究者番号：30186374
(H20 -> H21 : 連携研究者)

高木　亮一　(TAKAGI RYOUICHI)
千葉大学·大学院理学研究科·名誉教授
研究者番号：00015562
(H20 -> H21 : 連携研究者)

(3)連携研究者

(　　)

研究者番号：