

平成 21 年 6 月 1 日現在

研究種目：基盤研究(C)  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号：18540224  
 研究課題名（和文） 未知の定積分項を含む非局所非線形境界値問題の解の安定性と極限形状の研究  
 研究課題名（英文） Research on the stability and asymptotic shapes of nonlocal nonlinear boundary value problems including unknown definite integrals  
 研究代表者  
 四ツ谷 晶二 (YOTSUTANI SHOJI)  
 龍谷大学・理工学部・教授  
 研究者番号：60128361

研究成果の概要：微分方程式の係数の中に解自身の定積分項を含む、非局所非線形境界値問題は、物性物理学や微分幾何学等にあらわれるが、大域的解構造の解明の手法は数年前に研究代表者により突破口が開かれ、今回の研究課題遂行結果、応用範囲が拡がり、手法も深化した。従来未解明であった、Cahn-Hilliard 方程式の空間 1 次元定常解の大域的分岐構造を完全に解明した。さらに、反応拡散方程式の定常解のまわりでの線形化固有値問題の固有値を決定する超越方程式、および、固有関数を表示する方法を発見し、その超越方程式の解析手法を示した。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,300,000	0	1,300,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	630,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：(1)非線形現象 (2)大域的分岐構造 (3)Cahn-Hilliard equation (4)楕円関数  
 (5)完全楕円積分 (6)線形化固有値問題 (7)非局所 (8)非線形境界値問題

## 1. 研究開始当初の背景

反応拡散系 (reaction-diffusion system) や相互拡散方程式系 (cross-diffusion system) をはじめとする放物型偏微分方程式は、自然界に見られる自発的パターン形成や波動の伝播などを記述するモデル方程式として、数学的な立場から多くの研究がなされてきた。

その定常状態を記述する非線形楕円型方程式においては、解の対称性、集中現象、特

異性の発現など、見かけは簡単な方程式系であっても驚くほど豊かな数学的構造が備わっている。

このように、解の定性的な挙動について調べることは、非線形楕円型および放物型偏微分方程式の研究におけるもっとも重要かつ興味深い問題の一つとなっている。

非局所項をもたない通常の非線形楕円型境界値問題に対しては、数多くの優れた結果が知られている。しかし、未知の定積分項を

含む非局所非線形 2 階境界値問題の解の大域的な構造の研究は全くなかった。

代表者の四ツ谷はミネソタ大学の Ni 教授およびアイオワ大学の Lou 教授との共同研究において、未解決であった cross-diffusion 方程式の極限方程式の定常解の構造について、数式処理ソフトで試行錯誤と最新の非線形偏微分方程式の手法により、その全容の概要をとらえることに成功した。この極限方程式は、未知の定積分項を含む非局所非線形境界値問題である。

細部において理解が難しい部分を調べているうち、巧妙なパラメータ付けによりすべての解が楕円関数を用いて陽に表示できることを発見した。大域的分岐問題を完全楕円積分  $K(k), E(k), (\ast, k)$  からなる超越方程式に帰着し、この超越方程式のすべての解の様子を詳細に調べたのである。この研究は 2000 年から開始され、結果は 2004 年に欧文誌 D C D S 特集号に発表された。

この研究が突破口となり、さまざまな非線形現象を記述する、未解決の非局所非線形境界値問題の集中的な研究が開始され目覚ましい成果が上がっている。

例えば、京大数理研岡本教授が提起した Oseen の螺旋流の全体像を明らかにするための大域的分岐問題の完全解決が、Ikeda-Kondo-Okamoto-Yotsutani でなされた。この結果は 2003 年に欧文誌 C P A A に掲載された。

また、円周上の Ginzburg-Landau 方程式の定常解の大域的分岐問題の完全解決が、研究分担者である森田教授と共に Kosugi Morita-Yotsutani でなされた。この問題は G-L 方程式の基本的な問題であるにもかかわらず、従来は関数解析的な手法による部分的な結果しか得られておらず長年の懸案であった。この結果は 2005 年に欧文誌 C P A A に掲載された。

さらに、磁場を含む円周上の Ginzburg-Landau 方程式の定常解の大域的分岐問題の完全解決が Kosugi-Morita Yotsutani でなされた。この問題は従来は解明が全く不可能と思われていたもので、我々の結果は全く画期的なものである。この結果は 2006 年に欧文誌 J. Math. Phys. 特集号に掲載された。

以上は、数理物理学に関連したものであったが、未知の定積分項を含む非局所非線形 2 階境界値問題の解の大域的な構造の研究は、微分幾何学の弾性曲線の問題に深く関連している。

Kac のスペクトル逆問題に密接に関連して現れる平面曲線に関する問題「曲線の長さとしてそれと囲まれる面積を与え、弾性エネルギーが最小となる曲線を決定せよ」である。この問題は、渡辺助教授（防衛大）により、研究が始められ、部分的な結果が得られていたが、

完全解明ははるかかなたという印象であった。しかしながら、研究分担者の松本教授、龍谷大学の研究生の村井氏との共同研究により完全解明ができるということがわかった。証明は、膨大な計算となり計算機援用によって発見した。結果の全体概要は、2005 年、Matsumoto-Murai-Yotsutani により報告され、現在も詳細を調べている。

## 2. 研究の目的

このように、これまで未解決であった、未知の定積分項を含む非局所非線形境界値問題でも、研究代表者四ツ谷が発見した手法を応用すれば解ける問題がまだまだ多く存在する。

共同研究者の協力を得て、数理物理学・微分幾何学等にあらわれるこれまで未解決であった、未知の定積分項を含む非局所非線形境界値問題に挑戦する。

まず大域的解構造を把握し、パラメータの値が特別の値に近づくと、特別な極限形状になったり、解の爆発が起こったりする様子を数学的に解明する。さらに応用上重要な、定常問題の解の安定性を調べる。

## 3. 研究の方法

従来からの研究で未解明部分解明の研究としては、

- ・数理生態学にあらわれる cross-diffusion 方程式の極限方程式の定常解の大域的構造とその安定性の解明
- ・非局所項をもつ Gierer-Meinhardt 系の大域的分岐構造と極限形状の解明

という問題に取り組む。

新たに挑戦する問題としては、

- ・従来研究してきた Ginzburg-Landau 方程式と密接に関連している、Cahn-Hilliard 方程式を典型例とする液体・固体の相変化を記述する数理モデルの定常解の大域的な分岐構造
- ・安定性の解析の基礎となる線形化固有値問題の解析、特に定常問題の解の表示が得られているとき、線形化固有値問題の固有値・固有関数の表示式を得、さらに固有値の漸近表示・固有関数のもつ形状の特徴を明示

という問題に取り組む。

これまでの研究課題遂行の過程で、数値実験による注意深い観察に基づき変数変換による再計算の作業を通じて、新たな数学的解析手法を発見してきた。今回も同様である。

## 4. 研究成果

新たに挑戦した問題に対する成果として

は、「研究成果の概要」の項で述べたように、

- ・ Cahn-Hilliard equation の空間 1 次元定常解の大域的分岐構造を完全に解明すること
- ・ 線形化固有値問題の解析．特に、定常問題の解の表示が得られているとき、線形化固有値問題の固有値・固有関数を表示式を得、さらに、固有値の漸近表示・固有関数のもつ形状の特徴を明示することに成功したことである。

従来からの研究に関しては、上記研究の課程で新しい手法を発見したので、これまで解決が困難であったところを突破できる見込みがたち、現在計算を進めており順次成果を発表していく。

まず、研究代表者四ツ谷晶二の主な研究成果について説明する。

2007 年に欧文誌 *Discrete Conti. Dynam. Systems* に発表した、研究分担者当の森田善久教授と小杉聡博士（当時龍谷大学の PD）との共著論文において、未知の定積分項を含む非局所非線形境界値問題の典型例である Cahn-Hilliard equation の空間 1 次元定常解の大域的分岐構造を完全に解明した。

従来は、間接的に解の全体構造を示唆する結果が知られていたが、完全解明には至っていなかった。

連立超越方程式に帰着されること、および、その解析いずれも従来の手法とは全く別な独創的なものであり、論文投稿の際に査読者から、驚嘆すべき明解さとシャープさとを併せ持った極めて質の高い論文であるとの評価を受けた。アーベル、ヤコビが創始した古典的な楕円関数論と、ここ数年で急速な進展を遂げた数式処理と計算代数の有機的な組み合わせをもって初めて解決できた画期的結果である。この方法は、Cahn-Hilliard equation より複雑な Fix-Caginalp equation の定常解の大域的分岐構造を解明することにも応用可能であることに気付き、計算を行っている。

次に、欧文誌 *Communication on Pure and Applied Analysis* に掲載された若狭徹氏（早稲田大助教）との共同研究成果について説明する。反応拡散方程式の定常解のまわりでの線形化固有値問題の固有値を決定する超越方程式、および、固有関数を表示する方法を発見し、その超越方程式の解析法を示したものである。具体的に Chafee-Infante 問題の典型例のひとつである、振り子方程式に対して手法の有効性を確認した。さらに、拡散係数を零に近づけたときの、固有値分布について精密な漸近表示を得た。

従来、固有値・固有関数を具体的に示す公

式を得ることは不可能と思われていたが、これは常識を覆す結果である。古典的な Sturm-Liouville 理論で固有値・固有関数の存在は保証されているが、固有値を決定する簡潔な方程式があるかどうか、固有関数の簡潔な表示式があるかどうかは、根源的かつ重要な長年の未解決問題であった。

これらのことに肯定的に答えるため、全く新たな手法を発見した。今回発見した手法は、線形化固有値問題の固有値問題のみならず古典的 Sturm-Liouville 理論のそのものに新たな見方を与えるものである。

この問題自身は未知の定積分項を含む非局所非線形境界値問題ではないが、問題が連立超越方程式に帰着することを発見できた。上記、Cahn-Hilliard equation の研究に新たに得られた解析手法を応用・発展させることにより固有値分布精密な漸近公式を得た。双安定という一般的な枠組みで何が成り立つのかの吟味は、今後の大変興味のある問題である。

現在、この研究を推し進め、もととなっている反応拡散方程式の解の挙動の理解に極めて重要な固有関数の形状について調べ、拡散係数を零に近づけたときの、精密な漸近表示を得ることができた。現在、論文としてまとめる作業を行っている。

以下、研究分担者の関連する研究成果について簡単に述べる。

森田善久教授・二宮広和准教授の共著論文について説明する。反応拡散系のアトラクターに関する研究である。双安定な反応拡散方程式にも不安定非定数定常解が存在することに着目し、その不安定定常解と安定定常解をつなぐ進行波解の存在を示した。これにより、非平面な等高面をもつ新しいタイプの進行波解の存在がわかった。この進行波解は、フィッシャー方程式のような単安定系に見られるような進行波解であるので、ある速度より大きな速度に対して存在することが分かった。他の形状の進行波解の存在も現在研究を行っている。

岡（国府）宏枝教授は、fast-slow predator-prey system の進行波解の種類複雑さが、horseshoe map に対応することを、Conley 指数理論を発展させた理論の枠組みを構築して、それをを用いて示した。

## 5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

[ 雑誌論文 ] ( 計 9 件 )

- T. Wakasa and S. Yotsutani:  
Representation formulas for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems, Communication on Pure and Applied Analysis, 7(2008), 665-682, 査読有
- Y. Morita and H. Ninomiya:  
Monostable-type traveling waves of bistable reaction-diffusion equations in the multi-dimensional space, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) 3(2008), 567-584. 査読有
- S. Day, H. Kokubu, S. Luzzatto, K. Mischaikow, H. Oka and P. Pilarczyk :  
Quantitative hyperbolicity estimates in one-dimensional dynamics, Nonlinearity 21 (2008), 1967-1987. 査読有
- S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani :  
Stationary solutions to the one-dimensional Cahn-Hilliard equation: Proof by the complete elliptic integrals, Discrete Conti. Dynam. Systems, 19(2007), 609-629. 査読有
- C.-N. Chen and Y. Morita:  
Bifurcation of vortex and boundary-vortex solutions in a Ginzburg- Landau model, Nonlinearity, 20(2007), 943 - 964. 査読有
- M. Gameiro, T. Gedeon, W. Kalies, H. Kokubu, K. Mischaikow and H. Oka :  
Topological horseshoes of travelling waves for a fast-slow predator-prey system, Journal of Dynamics and Diff. Eq.,19(2007), 623-654. 査読有
- S. Kosugi and Y. Morita: Phase pattern in a Ginzburg-Landau model with a discontinuous coefficient in a ring, Discrete Conti. Dynam. Systems, 14(2006), 140 - 148. 査読有
- Y. Morita and H. Ninomiya:  
Entire solutions with merging fronts to reaction-diffusion equations, J. Dynam. Differential Equations, 18(2006), 841 861. 査読有
- M. Iida, M. Mimura and H. Ninomiya:  
Diffusion, cross-diffusion and competitive interaction J. Math. Biol.53(2006), 617 641. 査読有

[ 学会発表 ] ( 計 4 件 )

- T. Wakasa and S. Yotsutani:  
On some linearized eigenvalue problems associated with Chafee-Infante equation, World Congress of Nonlinear Analysis, July 7, 2008, Orlando, Florida, US
- Y. Morita: Bifurcation analysis for a Ginzburg-Landau model, May 31, 2008, Taida Institute of Mathematical Science,

National Taiwan University.

- Y. Morita: Bifurcation analysis for a Ginzburg-Landau, Equadiff 07, August 5-11, 2007, Vienna, Austria.
- Y. Morita: Bifurcation of vortex solutions in a Ginzburg-Landau model for small  $\kappa$ , International Conference on Mathematical Theory of Superconductivity and Liquid Crystals, May 14-18, 2007, East China Normal University.

[ 図書 ] ( 計 1 件 )

- M. Iida, and H. Ninomiya: A Reaction - Diffusion Approximation to a Cross-Diffusion System, Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues, World Scientific Publishing, eds by M. Chipot and H. Ninomiya (2006) 145-164

[ その他 ]

<http://www.ryukoku.ac.jp/who/detail/592188/>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

四ツ谷 晶二 (YOTSUTANI SHOJI)  
龍谷大学・理工学部・教授  
研究者番号 : 60128361

(2) 研究分担者

森田 善久 (MORITA YOSHIHISA)  
龍谷大学・理工学部・教授  
研究者番号 : 10192783

松本 和一郎 (MATSUMOTO WAICHIRO)  
龍谷大学・理工学部・教授  
研究者番号 : 40093314

岡 (国府) 宏枝 (OKA (KOKUBU) HIROE)  
龍谷大学・理工学部・教授  
研究者番号 : 20215221

二宮 広和 (NINOMIYA HIROKAZU)  
龍谷大学・理工学部・准教授  
研究者番号 : 90251610