

平成21年5月29日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540226

研究課題名（和文） 可積分な多項式ハミルトン系の完全リストの作成

研究課題名（英文） Toward a complete list of integrable polynomial Hamiltonian systems

研究代表者

吉田 春夫 (YOSHIDA HARUO)

国立天文台・理論研究部・教授

研究者番号：70220663

研究成果の概要：全エネルギーが負の時のケプラー運動の軌道は、初期値によらず周期軌道（楕円軌道）になる。この軌道が常に周期軌道になるという性質は、考える系が最大数の独立な第一積分を持つこと、つまり系の超可積分性の帰結である。本研究ではポテンシャル場での質点の運動がこのような超可積分性を持つための必要条件を、具体的なアルゴリズムの形で初めて与えた。本結果は科学研究費補助金によって可能となったポーランドの研究協力者との共同研究によって得られた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	420,000	2,820,000

研究分野：天体力学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系，ハミルトン系，必要条件，超可積分性

1. 研究開始当初の背景

古典力学の研究における基本問題の一つに「具体的に与えられたハミルトン系が可積分か否かを判定すること」がある。ハミルトン系が可積分であるとは、運動方程式の一般解を解析的に求めることができることを意味する。例えば万有引力で相互作用する2質点の運動を記述する2体問題は可積分であるが3体問題は可積分でない。

自由度Nのハミルトン系の場合、包含系をなす自由度の数だけの独立な第一積分の存在

が系の可積分性を保証する。これはリウビルの定理として知られている。自由度1のハミルトン系は、ハミルトニアン自身が第一積分になっているのでリウビルの定理により常に可積分である。よって非自明で最も簡単な場合が自由度2の場合であるが、この場合に限っても現在のところ、あるアルゴリズムによって可積分性を判定するという基本問題は解決されていなかった。

2. 研究の目的

本研究はそのような可積分性のより強力な判定条件を求め、それをフルに活用することによって可積分なハミルトン系のより完全なリストを得ることを目的とした。より具体的には、質点の運動を記述するハミルトン系が可積分となるようなポテンシャル $V(q)$ の一覧表を作ることを目的とした。そして自然な延長として3次元以上の可積分なポテンシャル、可積分なハミルトン系のリストも視野に入れた。

3. 研究の方法

海外研究協力者であるアンジェイ・マチェフスキー氏（ポーランド）ならびにマリア・プシビルスカ氏（ポーランド）との共同研究を、相互訪問の形で行った。この二人は2005年に出版した論文において、本研究課題におけるある種のブレイクスルー的な寄与をし、一方でこの研究課題に過去30年近くを費やしてきた研究代表者との連携が極めて有効であると考えられたからである。また主としてヨーロッパで行われた当該分野の研究集会を共同研究の機会として活用した。これを実現するための外国旅費は主として本科学研究費補助金によるものである。また実際の共同研究の場で必要であった高度の数式処理とそれを可能にするノート型のパーソナルコンピュータの購入費用（ハードウェア及びソフトウェア）を本補助金から支出した。

4. 研究成果

海外研究協力者との共同研究を進めるうちに、当初の期待・予想とは裏腹に、可積分ポテンシャルの完全リストの作成には依然として種々の困難が伴うことが確認されてきた。そのため一種の妥協策として、可積分系のサブクラスである超可積分系に対する必要条件およびその完全リストの作成に方針を転換し、ある程度の良い結果が得られた。以下はその概要である。

(1) 主な成果：超可積分性の必要条件

解が解析的に求められるハミルトン系を可積分系 (integrable system) と言うが、その可積分系のなかで最大数の独立な第1積分を持つものは超可積分系 (super-integrable system) と呼ばれる。ケプラー問題は超可積分系の代表である。超可積分系では有界な軌道はケプラー問題における楕円軌道のように常に周期軌道となる

中心力場における質点の運動は常に可積分

であるが、任意の初期条件に対して有界な軌道が常に周期軌道となるポテンシャル $V = V(r)$ はケプラー問題: $V(r) = -1/r$, および等方調和振動子: $V(r) = r^2$, の場合のみに限られることが知られている (ベルトラン, 1873). この有界な軌道が常に周期軌道になることは超可積分性の一つの帰結なので, ベルトランの定理は超可積分となる中心力ポテンシャルを全て列挙したものと解釈することができる。

本研究では同次式ポテンシャル系の可積分性の必要条件としてのモラレス・ラミスの定理 (2001) をさらに制限する形で, 同次式ポテンシャル系の超可積分性の必要条件を得た。以下がその詳細。

k 次の同次式ポテンシャル $V(q) = V(q_1, q_2)$ に対し, 連立代数方程式 $V'(q) = q$ の解 $q = c$ を一つ固定する。そしてこの点で

$$\lambda = \text{trace } V''(c) - (k-1)$$

という量を定義する。ここで $V''(c)$ はポテンシャル $V(q)$ のヘッセ行列を $q = c$ で評価したものである。この時, ハミルトン系

$$H = (1/2)p^2 + V(q)$$

の可積分性の必要条件としてのモラレス・ラミスの定理は, λ に対する制約として無限離散点列

$$\{0, 1, k-1, k+2, 3k-2, \dots\}$$

または

$$\{(k-1)/(2k), (k-1)/(2k) + k, (k-1)/(2k) + 3k, \dots\}$$

に入るべきことが課され, $k = \pm 2$ では任意の値が許され, $k = \pm 3, \pm 4, \pm 5$ ではさらなる離散点列が許される, というものであった。

超可積分系はもちろん可積分系でもあるので, 少なくとも上の条件を満たす必要がある。つまり可積分となるために許される λ 値のなかのある部分集合だけが超可積分性の必要条件として生き残るのである。今回得られた新しい超可積分性の必要条件は同次式ポテンシャルの次数 k に応じて

① $k \geq 3$ または $k \leq -3$:

λ は

$$\{(k-1)/(2k), (k-1)/(2k) + k, (k-1)/(2k) + 3k, \dots\}$$

という非整数有理数の点列, および $k = \pm 3, \pm 4, \pm 5$ では付加的な非整数有理数の点列

② $k=2$: $\lambda = (n/m)^2$, 0 でない有理数の2乗

③ $k=1$: $\lambda = 0$

④ $k=-1$: $\lambda = 1$

⑤ $k=-2$: $\lambda = 1 - (n/m)^2$

となるべきことを示した。

得られた超可積分性の必要条件を同次式の中心力ポテンシャル $V = r^{-k}$ に適用すると、 $\lambda = 1$ と計算される。この λ の値が超可積分性と両立するのは $k = -1$ および $k = 2$ の場合だけである。つまり超可積分となるのはケプラー運動 ($k = -1$) および等方調和振動子 ($k = 2$) のみに限られることが結論できる。このように先に述べたベルトランの定理の内容が、より一般的な主張の単なる一例として示すことが可能となった。

他の応用例として任意の整数次数 k で存在する既知の可積分な同次多項式ポテンシャルに適用すると、次数 k が 3 以上では決して超可積分とはなり得ないことが簡単に示される。これは同次多項式ポテンシャルに限定すれば、超可積分系は既知のもの以外には存在しないことを示唆する。ここで既知の超可積分ポテンシャル系とは、振動数比が有理数の調和振動子を指す。

(2) 海外研究協力者のみによる研究成果

二人の海外研究協力者との共同研究を開始したことは、研究協力者どうし、並びに研究協力者と第三者との間の共同研究のテーマを与えることにも寄与し、かつ具体的な成果を生み出した。その例がプレプリント

Guillaume Duval, Andrzej J. Maciejewski, Jordan obstruction to the integrability of Hamiltonian systems with homogeneous potentials, arXiv:0902.0079 (2009) である。この内容は従来、可積分性の必要条件を与える時に、 $V'(q) = q$ の解 $q = c$ におけるポテンシャルのヘッセ行列 $V''(c)$ は常に対角化可能と仮定していたが、もし固有値が縮退して対角化できないときは、直ちに系の非可積分性が示されることを主張するものである。この結果の応用は豊富で、特殊解の周りでの線形解析だけではその非可積分性を示すことが出来なかった一連のクラスを一気に非可積分として結論することを可能とした。その意味でこの結果は可積分ポテンシャルの完全リストの作成に近づくための重要なブレイクスルーである。この結果にもとづいた研究代表者と研究協力者との共同研究が進行中で、共著の論文執筆も準備している。

(3) 得られた成果の国内外における位置づけ・インパクト

本研究課題は古典力学の基本問題の一つであるにもかかわらず、それを課題として取り組む研究者人口は少ない。具体的に新しい結

果が数年以内に得られるという保証が無いためである。それゆえ得られた成果は国内外という空間的広がりにおいて最先端を独走している。当該分野の研究者人口の少なさは数年単位での論文被引用数という観点でのハンディをもたらすが、長期的に見た場合、本研究成果は確実に次の世代に残せる遺産となるだろうことを自負している。

(4) 今後の展望

海外研究協力者との共同研究は終了しておらず、現在も電子メールによる形で継続中である。論文出版という形での具体的な成果が量的に期待したレベルには達しなかったため平成 21 年度の補助金申請は見送ったが、今後さらに実績が蓄積出来た段階であらためて類似課題による補助金申請を行い、当初の目的達成に少しでも接近したいと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① Andrzej J. Maciejewski, Maria Przybylska, Haruo Yoshida, Necessary conditions for superintegrability of Hamiltonian systems, Physics Letters A, 372, 5581-5587 (2008) 査読有
- ② Hideaki Ujino, Luc Vinet, Tetsu Yajima, Haruo Yoshida, Additional constants of motion for a discretization of the Calogero-Moser model, Journal of Physical Society of Japan, 77, 74001 (2008) 査読有

[学会発表] (計 7 件)

- ① 吉田春夫, ハミルトン系の可積分性と解の特異点の古典的正則化可能性, 天体力学N体力学研究会, 2009年3月14日, 国立天文台, 東京都三鷹市
- ② 吉田春夫, Necessary conditions for super-integrability of Hamiltonian systems with homogeneous potential, Dynamics Days Asia Pacific 5 (The 5th International Conference on Nonlinear Science), 2008年9月10日, 奈良県新公会堂, 奈良市

- ③ 吉田春夫, 同次式ポテンシャル系の超可積分性の必要条件, 「戸田格子 40 周年非線形波動研究の歩みと展望」研究集会, 2007 年 11 月 9 日, 九州大学応用力学研究所
- ④ 吉田春夫, 同次式ポテンシャル系の可積分性と超可積分性, 「ハミルトン系とその周辺」研究集会, 2007 年 11 月 2 日, 岐阜大学工学部
- ⑤ 吉田春夫, 同次式ポテンシャル系の超可積分性の必要条件, 天体力学N体力学研究会, 2007 年 3 月 8 日, 木更津高等専門学校, 千葉県
- ⑥ 吉田春夫, Integrability of 2D homogeneous potential, Conference on Differential Equations and Singularities (A Satellite Conference of ICM 2006), 2006 年 9 月 7 日, Tordesillas, Valladolid, Spain
- ⑦ 吉田春夫, Present status toward a complete list of integrable 2D homogeneous polynomial potentials, International Conference on Chaos and Dynamical Complexity, 2006 年 5 月 24 日, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉田 春夫 (YOSHIDA HARUO)
国立天文台・理論研究部・教授
研究者番号: 70220663

(2) 研究分担者

該当者なし

(3) 連携研究者

該当者なし

(4) 海外研究協力者

Andrzej J. Maciejewski
アンジェイ・マチエフスキー
(ポーランド・ジェローナグラ大学・教授)

Maria Przybylska
マリア・プシビルスカ
(ポーランド・トルン大学・助教授)