

研究種目： 基盤研究（C）

研究期間： 2006 - 2008

課題番号： 18540384

研究課題名（和文） 量子エンタングルメントと量子ゲーム

研究課題名（英文） Quantum entanglement and quantum game

研究代表者

全 卓樹（ZEN TAKUSU）

高知工科大学・工学部・教授

研究者番号： 60227353

研究成果の概要：

本研究においては、量子ゲーム理論にあってこれまで欠けていた「一般的定式化」が成功裏に試みられた。量子エンタングルメントの役割を陽に表わすゲーム理論を構成し、量子ゲーム理論の内実に含まれた「準古典的」及び「純量子的」の二側面を明確にした。そして「準古典的」内実が、通常の古典ゲーム理論そのものに加えて、ゲーム理論において従来扱うことが困難であった「利他性」を表す部分を持つことを示した。さらに「純量子的」内実を、ハーサニー型の不完備情報ゲームにおいて、純粹に分離して観測することが可能なことを示した。量子ゲーム理論が、これまでの通念とは異なり、経済学をはじめとした通常のゲーム理論にもインパクトがある事実を明確にすることができた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,400,000	0	1,400,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	600,000	4,000,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 物理学・数理科学・物性基礎

キーワード： ゲーム理論、量子戦略、量子相関、利他性、ベル不等式

## 1. 研究開始当初の背景

2粒子の相関を観測するとき、ベルの不等式の破れに典型的に見られるように、古典論的には論理的に排除されるべき事象が量子的に可能となることがあり、この背後に量子エンタングルメントが潜んでいることは現在では広く認識されている。それは量子エンタングルメントを量子論特有のリソースとし

て、古典的には実現不可能な情報通信操作をおこなおうとする、量子情報理論の最近十年来の興隆、そしてその応用としての量子情報工学の始動に特に明らかである。

ところが量子エンタングルメントは、最も簡単な場合を除いてはいまだ完全に理解されているとは言い難い。そしてその一方で、量子エンタングルメントのもたらし得る量子

論固有の事象が汲みつくされたとは言えない。量子エンタングルメントのこれまで知られていない側面の表出され得る場として、それ自体興味深く、また将来重要な応用の可能性のある研究分野として注目をあつめているものに「量子ゲーム理論」があった。

量子情報理論で通常想定される状況では、複数の主体が量子系の操作を通じて一つの目的を達しようとするが、これを一般化して、複数の主体が量子系の操作を通じて各自に固有な目的を追求するというものを考えることができる。これがまさに量子ゲームである。量子ゲーム理論においてはこの複数の主体を「プレイヤー」と呼び、各自の目的は各プレイヤーに割り当てられた「利得関数」の極大化によって達成される、と考える。つまり量子ゲーム理論は、現在の量子情報理論を包含する量子系操作の一般論として、その研究には量子工学的な応用も視野に入れたものである。

量子ゲーム理論はまた（古典）ゲーム理論の量子的拡張とも考えることができる。古典ゲーム理論では複数のプレイヤーの各々に「戦略」の選択を表す確率分布が割り当てられ、各プレイヤー毎に割り当てられた利得関数（それはすべてのプレイヤーの選択の確率分布の汎関数である）を各自が極大化する状況を考えるのであるが、この確率分布をヒルベルト空間のベクトルで置き換えたものが量子ゲームとなるわけである。古典ゲーム理論の拡張としての量子ゲーム理論では、古典ゲーム理論では解析が困難な複雑なゲーム状況が、量子ゲームとして定式化すると簡明に表現しうる場合がすでに指摘されている。具体的には「調停者」の存在するゲーム、また「利他的行動」や「協調的行動」の有効な記述として量子ゲームを捉える立場である。古典ゲーム理論は経済学、社会学等の社会科学を数学的厳密科学へと進める原動力である。それ故、量子ゲーム理論の研究は、通常の意味の量子系でないマクロな現象にまで応用の可能性が見込まれたのである。

量子ゲーム理論は通常、量子エンタングルメントが消滅する極限で古典ゲーム理論に帰着するように定式化される。すなわち量子ゲームと古典ゲームとの差異はまさに量子エンタングルメントに発している訳である。それゆえ量子ゲームの定式化にあっては、各プレイヤーの戦略に相当するヒルベルトベクトルと、古典的には存在しない量子エンタングルメントに分離されて、量子的なゲーム戦略が記述されることが望ましい。さらにゲーム理論的な利得関数の最適化を行うために

は、量子的ゲーム戦略をあらゆる状態が明確に規定されたヒルベルト空間内をくまなく一意的に覆い尽くすことが必須である。ところがこれまでの量子ゲーム戦略の取り扱いでは、このような点を然るべく考慮した定式化は存在しなかった。

## 2. 研究の目的

そのような背景の下、本研究では、量子ゲーム理論を、次の条件を念頭に全く新たに定式化するという目標が掲げられた。すなわち  
（１）量子エンタングルメントの役割を陽に表わすように理論を構成し、それを通じて量子エンタングルメントの従来見過ごされていた新しい側面をあばき出す  
（２）量子戦略全体が明確に限定されたヒルベルト空間全体を一意的に構成する  
（３）量子戦略の中で何がどのような意味で古典的で何が純粋に量子的か明確になるの３点である。

このように緊要度が高いはずの、首尾一貫した量子ゲーム理論の構成が未達成である主要な原因は、量子エンタングルメントを量子ゲーム理論に適合した形で表現することに成功してないことにある。現在筆者は、２粒子の量子状態の「無重複な個体的状態操作」という新しい概念での切り分けと、それを用いた２体量子エンタングルメントの従来とは異なる特徴づけについての研究を構想し進行させている。本研究では、この構想を縦系にして、真の意味で「理論」の呼称に耐えうるはじめての量子ゲーム戦略の研究を行おうとする。これが達成された暁には、次のようなことのできるようになる可能性が高いと考えられる。

（１）量子エンタングルメントの新たな側面が明確になり、それを体現する表式が得られる

（２）そのようなエンタングルメント理解の量子情報理論への応用がある

（３）与えられた量子ゲームの問題についてのナッシュ平衡点が最終的に決定される

（４）量子的ナッシュ平衡の存在条件の理解が進み、場合により、一般的存在証明が行われる

（５）量子的ゲーム戦略の物理的内容の理解が進み、なにが真に量子的かが解明される

（６）古典ゲーム理論の従来隠されていた側面が露になり、古典ゲーム戦略の理解が深まる

量子的なゲーム戦略についての研究は D.A. Meyer, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 1052 のコインフリッピングの量子的取り扱いと J. Eisert, et. al., Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 3077 の量子的囚人のディレンマの考察が嚆矢である。現状については A. Iqbal のレビュー quant-ph/0503176 等に詳しいが、その後の5年ほどの多岐に渡る多くの研究は、ほとんどが Eisert 論文の定式化を基礎として、それを適宜拡張した上で、異なった問題やより複雑な問題に適用したものである。

この現状の標準的な定式化に対する批判的検討が S.C. Benjamin and P.M. Hayden, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 069801 であり、既存の定式化では必要なヒルベルト空間全体の状態の動員が行われておらず、それでは「量子ゲーム理論」として掲げられた目標が未達成であることが指摘されている。この批判への回答は長らく存在しなかった。

量子エンタングルメントの量子ゲーム理論において果たす決定的な役割については、Eisert 論文に始まってその後も絶えず言及され強調されているが、具体的な結論や明快な知見は特に得られていなかった。それ故、本研究は量子論の基礎的研究としても、また古典ゲーム理論とその応用分野、さらに量子情報理論への波及効果を考えても、その意義は小さくないものと考えられた。

### 3. 研究の方法

最初は、筆者が以前に考案した「ゲーム戦略を表わすヒルベルトベクトルを各プレイヤーの状態を表わすベクトルと量子的仲介者を表わす相関因子の積で表わす」という手法を出発点とした。まず考えられたのは2粒子を記述する直積ヒルベルト空間上のベクトルを効率よく記述する方式として量子情報でよく知られるシュミット分解の活用である。このシュミット分解の係数が量子エンタングルメントの程度と直接関連するので、ここに量子ゲーム理論の一般的定式化が量子エンタングルメントの考察とまさに直接つながってこざるを得ない事情が理解されるであろう。すなわち2プレイヤー多戦略量子ゲームの「よい」定式化とは、2粒子多状態エンタングルメントの「よい」記述と表裏一体の関係にあり、一方なくして他方はありえない。それ故にまだ詳細な構造の知れていない多状態2粒子の量子エンタングルメントの記述の試みと、その物理的内実の精査が、

問題の中心課題となった。

量子情報理論にあっては一般にそれほど問題にされないが、量子ゲームの研究に際して非常に重要なのは量子戦略に対応する状態がそれを記述するパラメタで一意的に記述されるべき点である。これ無くしては安定的な利得極大戦略、すなわち量子的ナッシュ平衡点の計算が不可能になるためである。2プレイヤー2戦略の簡単な場合に限って考えても、このような条件を課すことによって量子エンタングルメントの取り扱いが通常の量子情報理論で行われるのとは少し異なってくるべきことが示せる。具体的にはこの場合通常1パラメタで扱われるエンタングルメントが2パラメタで扱われなければならない。こうして量子エンタングルメントの知られざる側面に光を当てることができた。

必要なパラメタの数を勘定するだけでも、2プレイヤーに限定しても戦略数の増加とともに膨大になり、問題の解析的な取り扱いには多くの技術的困難遭遇した。それゆえ手法としては群論、位相幾何、関数解析といった数学を用いる解析的手法と、高速計算機を大々的に用いる数値的手法を併用して研究を進めた。

### 4. 研究成果

本研究によって、量子ゲーム理論を古典的ゲームの拡張としてどこまで「古典的」理解できて、どこから「本質的に量子的」な要素が現れるのか、そしてそこでのエンタングルメントの果たす役割は何か、という当初の問いへの、一応の解答を得ることができた。

具体的成果を列挙すると次のようである。

(1) 量子ナッシュ均衡においてエンタングルメントの果たす二つの役割を解明した。一つは「利他性」をもった修正されたゲームとして古典的に解釈可能な項によって表され、他の一つは量子的干渉の結果による利得函数の修正を表す項として表現された。

(2) 通常のゲーム理論は二名のプレイヤーの戦略をそれぞれ独立した確率で表して定式化される。これを二名のプレイヤーの戦略を連結確率として表す型に書き換え、この連結確率を、通常のようにこのプレイヤーの戦略確率の積に限らず、一般的な非分離型で書く新しいゲーム理論の定式化を考えた。

(2) ハーサニー型の複数タイププレーヤーのある非完備情報ゲームを量子的に考察した。新タイプの量子的ナッシュ均衡である「ベイズ的ナッシュ均衡」の概念を導入して、これを新たに考案した「拡張された男女の争いゲーム」に適用した。ここでの量子的利得が、ベル不等式のツィーレルソン量子限界と投下であることを示し、これによって、エンタングルメントという新しいリソースがゲーム理論にもたらす「純量子的」内実を曖昧さ無く確定する事に成功した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

- 1) A. Iqbal, T.Cheon and D. Abbott, "Probabilistic analysis of three-player symmetric games played using EPR settings", Phys. Lett. A 372 (2008) 6564-6577. (査読有)
- 2) T. Ichikawa, I. Tsutsui and T.Cheon, "Quantum game theory based on the Schmidt decomposition", J. of Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 135301 (9pp). (査読有)
- 3) P. Hejckik and T.Cheon, "Anomalous relativistic tunneling and exotic point interactions", Europhys. Lett. 81 (2008) 50001 (5pp). (査読有)
- 4) T.Cheon and A. Iqbal, "Bayesian Nash equilibria and Bell inequalities", J. Phys. Soc. Jpn. 77 (2008) 024801 (6pp). (査読有)
- 5) A. Iqbal and T.Cheon, "Evolutionary stability in quantum games", Chapter 14 in "Quantum Aspects of Life", ed. D. Abbott (Imperial College Press, 2008). (査読無)
- 6) A. Iqbal and T.Cheon, "Quantum games using non-factorizable probabilities" Phys. Rev. E 76 (2007) 061122 (12pp). (査読有)
- 7) P. Hejckik and T.Cheon, "Irregular

dynamics in solvable one-dimensional quantum graph", Phys. Lett. A 356 (2006) 290-293. (査読有)

- 8) Y. Nishimura, P. Seba and T.Cheon, "Metastable congested states in multisegment traffic cellular automaton", J. Phys. Soc. Jpn. 75 (2006) 014801 (5pp). (査読有)

[学会発表](計 5 件)

- 1) T.Cheon, New anatomy of quantum holonomy, International mini workshop on theoretical foundations and applications of quantum control, July 11, 2008, Tokyo Inst. of Tech, Tokyo.
- 2) T.Cheon, Quantum Bayesian Nash equilibria and Bell inequalities, International conference on quantum, nano and micro technologies, Feb. 11, 2008, Martinique, France.
- 3) T.Cheon, Quantum Game: Bayesian Nash Equilibria and Bell Inequalities, 9th Japan-Slovenia Seminar on Nonlinear Sciences, Nov 14, 2007, Osaka City Univ., Osaka.
- 4) 全卓樹、量子ゲーム/ナッシュ均衡とベル不等式、イノヴェイティブコンピューティング調査研究会第1回講演会「量子力学とシステム情報制御」、2007年7月21日、兵庫県立大学。
- 5) 全卓樹、ベイズ=ナッシュ均衡とベル不等式、KEK 理論物理研究会「安定と不安定」、2007年3月23日、高エネルギー加速器研究機構。

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)  
取得状況(計 0 件)

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者  
全卓樹 (ZEN TAKUSU)  
高知工科大学・工学部・教授