様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月　２９日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００６年度～２００８年度
課題番号：１８５６００５４
研究課題名（和文）　科学技術計算のための半解析的数値解法に関する研究

研究課題名（英文）　study on semi-analytic numerical methods for computations in science and engineering

研究代表者
緒方秀教（OGATA HIDENORI）
電気通信大学・電気通信学部・准教授
研究者番号：５０２４２０３７

研究成果の概要：本研究では，科学技術計算における偏微分方程式問題の数値解法のうち，基本解法（代用電荷法），境界要素法など「半解析的数値解法」と呼ばれる解法について，従来適用困難であった問題に対して解法を改良し適用可能とし，汎用性・実用性を高めることを目的とした．研究の結果，周期的３次元粘性流（Stokes 流）問題の基本解法，周期的弾性体問題の基本解法，および，周期的 2 次元ポテンシャル問題の境界要素法を構築することに成功した．そして，数値実験によりこれらの解法の有用性が確かめられた．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,000,000 円	0 円	1,000,000 円
２００７年度	1,000,000 円	300,000 円	1,300,000 円
２００８年度	900,000 円	270,000 円	1,170,000 円
年度			
年度			
総　計	2,900,000 円	570,000 円	3,470,000 円

研究分野：工学
科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎
キーワード：数値計算，偏微分方程式，半解析的数値解法，境界要素法，代用電荷法

１．研究開始当初の背景

本研究の目的は，科学技術計算において，基本解法（代用電荷法），境界要素法，積分方程式法など「半解析的数値解法」と呼ばれる一連の数値計算法に関する基礎的研究およびその可視化である．

半解析的数値方法は，科学技術研究に現れる偏微分方程式問題に対する数値解法であり，従来の有限要素法，差分法に変わる方法として，最近広く用いられている方法である．これらの方法はいずれも題意の偏微分方程式の基本解を近似解に用いている．基本解法では，近似解の特異点を問題領域の外部において近似解をいくつかの基本解の重ね合わせで与えており，境界要素法・積分方程式法では基本解を積分核とした積分により近似解を与えている．これらの方法では近似解は数式の形で与えており，その点で「半解析的」と呼ばれている．

半解析的数値解法の利点としては，
(1) 有限要素法・差分法などと比べて計算量が少ない，
(2) とくに基本解法はプログラミングが簡単である，
(3) 近似解が数式の形で与えられるので，近似解の微分・積分などの数学的操作が容易に扱える（有限要素法·差分法などは解が離散点上の値でしか与えられないので，近似解の微積分にはさらに数値微分・数値積分などの近似を要する），
などがある．一方，弱点としては
(1) 有限要素法・差分法などと比べ汎用性が低く，適用できる方程式などが限られる
(2) 適用に際し，ユーザにある程度の数学的知識を要する
などが挙げられる．

研究代表者・緒方は，上記の半解析的数値解法の弱点のうち「汎用性の低さ」を克服すること，すなわち，これまで適用が難しいとされていた問題に対して解法を改良・適用することに関する研究を行ってきた．そして，周期的ポテンシャル問題（数値等角写像），周期的２次元粘性流（Stokes 流）問題，圧縮性流体問題に対し基本解法の改良・適用について成果を挙げた．

２．研究の目的

上記「１. 研究開始当初の背景」を踏まえて，次の事項を研究の目的とした．

(1) 空間周期的問題に対する基本解法の構築

ここでいう「空間周期的問題」とは，例えば周期的に物体が並ぶ場における流体・電磁場・弾性問題などを指す．研究代表者・緒方はこれまで，上記の通り，2次元ポテンシャル問題，2次元粘性流（Stokes流）問題について周期的問題に対する基本解法の改良・適用を行った．これに対し本研究では，3次元Stokes流問題，2次元弾性板問題に対して，周期的問題に対する基本解法の改良・適用を目標とした．これらの業績を基に，上記の周期的問題に対する境界要素法，積分方程式法を考案し，様々な問題に応用する．

(2) 動的問題に対する半解析的数値解法

研究代表者・緒方の研究を含め，半解析的数値解法で扱う問題は，静的ポテンシャル問題など，時間定常な問題を対象としたものが多かった．本研究では動的問題（時間依存問題），例えば，電磁波・流体波・弾性波などの波動現象，熱伝導などの問題に対する半解析的数値解法とくに基本解法の適用を模索する．

(3) 解析関数近似としての半解析的数値解法

これまでの基本解法の数値等角写像・流体問題・関数近似への適用の研究において，緒方らは2次元ポテンシャル問題に対する代用電荷法近似を複素関数化することにより，数学でいう複素解析関数の近似に基本解法が有効であることを見た．これと同様に，2次元ポテンシャル問題に対する境界要素法・積分方程式法の複素関数化も解析関数近似に適用可能と予想される．本研究では，境界要素法・積分方程式法による解析関数近似について具体的にアルゴリズムを構築し，実際の科学技術計算への応用を図る．

３．研究の方法

(1) 空間周期的問題に対する基本解法の構築

研究代表者・緒方が過去の研究で扱い，本研究で扱う空間周期的問題は，解が周期関数を含むため，従来の基本解法ではよい精度で近似解をつくるのが難しい．これに対し本研究では，従来用いられた基本解，すなわち，1 個の特異点のみもつ基本解の代わりに,「周期的基本解」，すなわち，周期的に並ぶ特異点列をもつ基本解の 1 次結合による近似解をつくることを考える．

過去の研究で扱った周期的２次元ポテンシャル問題で説明すると，この場合の周期的基本解とは，複素平面内(2 次元 Euclid 平面の点 (x, y) と複素平面の点 $z = x + iy$ を同一視する）の周期点列 $z = ina$ （$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, a は周期の大きさ)に特異点を持つ周期的 2 次元 Coulomb ポテンシャル $-(1/2\pi)\log\sinh(\pi z/a)$ であり，周期的ポテンシャル問題に対してはこのポテンシャルの 1 次結合

$$u_N(z) = -\frac{1}{2\pi}\sum_j Q_j \log\left|\sinh\left[\frac{\pi}{a}(z-\zeta_j)\right]\right|,$$

で解を近似する．ここで Q_j は境界条件より定まる定数，ζ_j は問題領域外部にとった点である．

本研究で扱うのは Stokes 流方程式，弾性方程式（Lamé 方程式）である．前者（Stokes 流方程式）の基本解は Stokes 源(Stokeslet)，すなわち，1 点集中荷重により誘起される流れを表す解であるが, 本研究の周期的 Stokes 流問題では代わりに，周期的 Stokes 源，すなわち，周期的に並ぶ点列に働く荷重により誘起される流れを表す解の 1 次結合で近似解を構成する．後者（Lamé 方程式）の基本解

は Kelvin 解，すなわち，1 点集中荷重により誘起される変形を表す解であるが，本研究の周期的弾性体問題では代わりに，周期的 Kelvin 解，すなわち，周期的に並ぶ点列に働く荷重により誘起される変形を表す解の 1 次結合で近似解を構成する．

研究計画では，上記の考えに基づいて周期的 Stokes 流問題・周期的弾性体問題の近似解法を構築し，計算機による数値実験により解法の有効性を検証することを挙げた．

(2) 動的問題に対する半解析的数値解法

本研究では動的問題としてとくに，波動現象・熱拡散現象問題に対する基本解法アルゴリズムを構築することを計画に挙げた．具体的には，熱方程式を時間微分について差分近似して非斉次変形 Helmholtz 方程式に帰着させ, 変形 Helmholtz 方程式に基本解法による近似解を与え，時間差分により時間発展を求めることにより，熱方程式に対する近似解を構成することを想定していた．

(3) 解析関数近似としての半解析的数値解法

2 次元ポテンシャル問題に対する基本解法は，調和関数は複素解析関数の実部であることに着目すれば，解析関数の近似にも応用できる．すなわち，調和関数 $u(z)$ の近似

$$u(z) \approx \sum_j Q_j \log|z-\zeta_j|$$

において $u(z)$ を解析関数 $f(z)$ の実部とみなして，$f(z)$ を

$$f(z) \approx \sum_j Q_j \log(z-\zeta_j)$$

と複素対数ポテンシャルの 1 次結合で近似するのである．同様にして，周期的調和関数の近似

$$u\ (z) \approx \sum_j Q_j \log\left|\sinh\left[\frac{\pi}{a}(z-\zeta_j\right]\right|$$

から周期的解析関数 $f(z)$ の近似

$$f(z) \approx \sum_j Q_j \log\sinh\left[\frac{\pi}{a}(z-\zeta_j)\right]$$

が得られる．

本研究では，この周期的解析関数近似を（「(1) 空間周期的問題に対する基本解法の構築」で述べられている）周期的 2 次元弾性体問題に応用する．2 次元弾性問題は数学的には重調和関数問題で記述され，Goursat の公式により重調和関数は解析関数で与えられることが知られている．よって，弾性体の振る舞いは複素解析関数で記述されるのである．この観点から，周期的 2 次元弾性体問題に対して，弾性体を記述する複素解析関数に上記の近似を適用することにより，問題の近似を行う．

一方，複素解析関数の近似法として最近「複素変数境界要素法(Complex Variable Boundary Element Method, CVBEM)」が提案されている．これは，複素関数論における Cauchy の積分公式を境界積分方程式とみなし，この方程式を離散化して解くことにより，題意の複素解析関数の近似を得るという方法である．本研究では，この方法の複素解析関数への拡張，および，周期的 2 次元ポテンシャル問題への応用を計画とした．具体的には，Cauchy の積分公式を周期的解析関数に対して拡張し，これを境界積分方程式と見なして離散化して解くことにより，題意の関数の近似を得る．

研究計画では，上記の近似解法の具体的なアルゴリズムを構築し，計算機による数値実験で有効性を検証することを挙げた．

３．研究成果

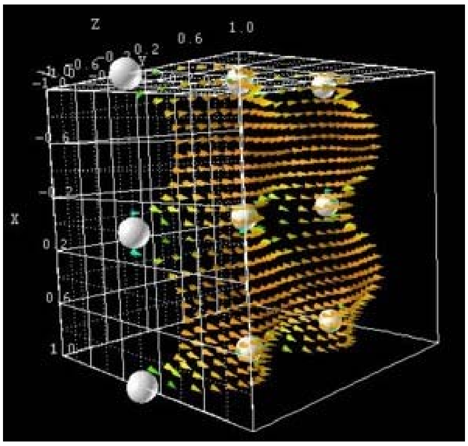
(1) 空間周期的問題に対する基本解法の構築

①周期的粘性流問題に対する基本解法
（５．主な雑誌論文等〔雑誌論文④，⑤，学会発表⑦〕）

本研究では，2 次元平面格子状または 3 次元空間格子状に周期的に並んだ物体列を過ぎる粘性流（Stokes 流）の問題に対する基本解法を提案した．上記問題に対して，従来の基本解法で用いられている Stokes 源の代わりに周期的 Stokes 源を用い，これの 1 次結合により周期関数を含む解の近似を行った．この方法により，周期的 Stokes 流問題に対する近似解が十分な精度で得られることが数値実験により確かめられた．図(1-i)は，平面正方格子上に並ぶ球列を過ぎる Stokes 流の様子を本研究の方法で求めた結果を可視化したものである．表(1-i)はその計算の誤差を示す．表(1-i)より，本研究の方法では節点数 N=100 程度で誤差 10^{-3}～10^{-7} 程度の精度を達成していることが分かる．一方，節点数 N を大きくしても誤差が単調減少しないという不安定性も見られ，今後解決すべき問題とされる．

② 周期的弾性体問題に対する基本解法（５．主な雑誌論文等〔雑誌論文①，学会発表⑧〕）

本研究では，1 次元周期性をもつ 2 次元弾性体問題に対する基本解法を提案した．上記問題に対して，従来の基本解法で用いられている Kelvin 解の代わりに，周期的 Kelvin 解



図(1-i) 平面上に周期的に並ぶ球列を過ぎる Stokes 流.

表(1-i) 平面正方格子上に並ぶ球列を過ぎる Stokes 流の問題に対する基本解法の誤差．表中，r は球の半径，a は格子定数（球の間隔），"error"は球表面上における流速ベクトルの相対誤差である．

r/a	0.1		0.3	
	N	error	N	error
	46	8E−5	46	4E−5
	64	1E−4	64	1E+0
	82	3E−4	82	1E+1
	106	6E−7	102	2E−3
	128	5E−4	128	2E+2

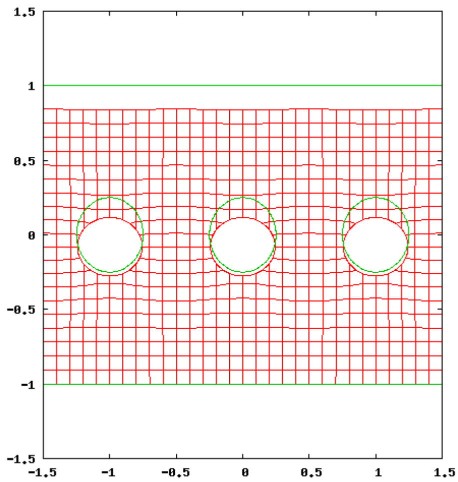
を用い，これの 1 次結合により周期関数を含む解の近似を行った．この方法により，周期的弾性問題に対する近似解が高い精度で得られることが数値実験により確かめられた．

図(2-i)は，周期的円孔列をもつ 2 次元弾性体に上面から一様な圧力をかけた場合の変形の様子を，本研究の方法で求めたものである．図(2-ii)は図(i)の計算例において，円孔･上面･下面における応力（円孔・上面）または変位（下面）の計算誤差を，基本解法の節点数 N に対してプロットしたものである．図(2-ii)から，本研究の方法において，誤差は節点数 N に対し指数関数的に減衰し，N=150 程度で誤差～10^{-10}の精度を達成している．これは，差分法・有限要素法といった偏微分方程式の他の標準的な解法が N^{-2} または N^{-3} のオーダーの誤差で収束するのに比べて，きわめて速い収束である．

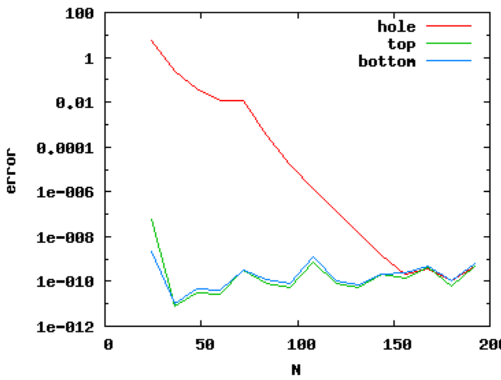
<u>（２）動的問題に対する半解析的数値解法</u>

この研究目的・計画については，残念ながら公表できる形としての成果を挙げることが出来なかった．

熱方程式の数値解においては，時間微分を差分近似して得られる非斉次変形 Helmholtz 方程式の基本解法近似までは成功した．しかし，そこから先の時間差分による時間発展を求める計算が当初の予想より難しく，最終的に熱方程式の解の時間発展を計算するまでに至らなかった．この問題については，今後の研究で再挑戦したいと考えている．



図(2-i)：周期的円孔列をもつ 2 次元弾性体の変形.



図(2-ii)：周期的円孔列を持つ弾性体の変形に対する基本解法の誤差.

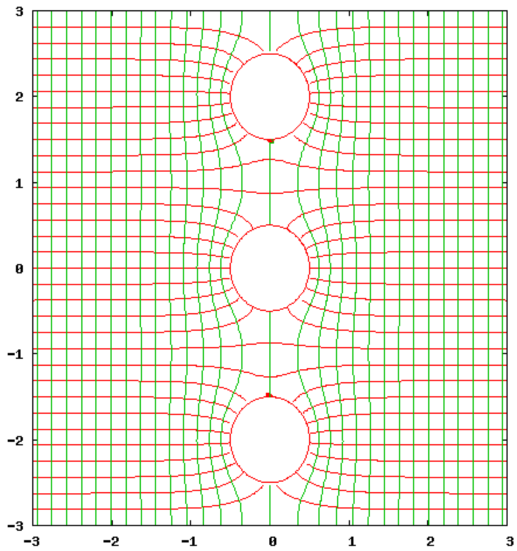
<u>（３）周期的 2 次元ポテンシャル問題に対する境界要素法</u>（５．主な雑誌論文等〔雑誌論文②，学会発表②，③，④，⑤〕）

周期解析関数の基本解法による近似についての研究成果は，「(1) <u>空間周期的問題に対する基本解法の構築</u> ①周期的粘性流問題に対する基本解法」に述べたとおりである．

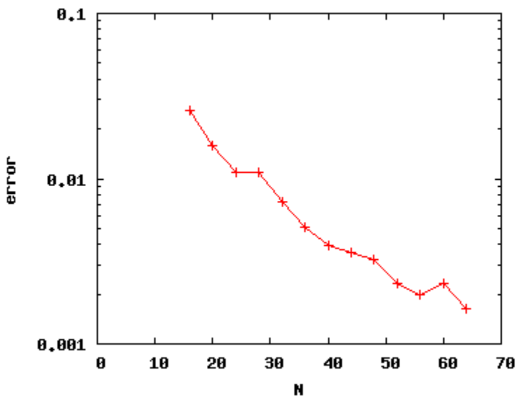
複素変数境界要素法の周期的解析関数への拡張については，下記の成果を挙げた．研究計画に述べたとおり，Cauchy の積分公式を

周期的解析関数に対して拡張し，これを境界積分方程式と見なして離散化して（詳しくは境界上で解を区分的１次関数近似することにより）解くという方法で，周期的解析関数による境界要素法の構築を行った．そして，この方法は十分な精度で近似解を与えることが，数値実験により確かめられた．

図(3-i)は，周期的に並ぶ円柱導体列のある場に，導体列に垂直な方向に一様電場をかけたとき生じる電場の様子を，本研究の方法で求めたものである．図(3-ii)から本研究の方法では，
節点数 N=70 程度で誤差 10^{-3} 程度の精度を達成していることが分かる．本研究では協会積分方程式を線形近似で解いているが，高次多項式あるいはスプライン関数による近似により，精度をより高めることができると考えられる．これは将来の課題である．



図(3-i)：周期的円柱導体列のある場に，導体列に垂直な方向に一様電場を与えたとき生じる電場．赤い線は電気力線，緑の線は等ポテンシャル線を表す．



図(3-ii)：周期的に並ぶ円柱導体列のある場に一様電場をかけた場合（図(3-i)の例）の静電ポテンシャルを本研究の CVBEM で計算したときの，近似ポテンシャルの誤差．縦軸は相対平均誤差，横軸は節点数 N を表す．

<u>本研究の位置づけ・インパクトと今後の展望などについて</u>

本研究では空間周期的問題をターゲットとして半解析的数値解法の拡張を行い，上記のような成果を挙げた．これにより，偏微分方程式数値解法としての半解析的数値解法の汎用性が高まり，科学技術研究の現場においても使用する数値解法のツールがひとつ増えたとも言える．

また，空間周期的問題に限らず，問題の性質によってそれに適した基本解を選ぶことにより，半解析的数値解法が一層能力を発揮できる．本研究はその典型的な例であると考える．問題により用いる基本解を変えるというアプローチは，空間周期的問題の他にどういう問題に適用しうるかは，今後の研究の課題である．

一方で，すでに知られている半解析的数値解法の利点（外部領域問題に強い，など）を最大限生かして，他の数値解法と組み合わせることにより偏微分方程式を解くというアイディアも考えられる．その例として，基本解法と有限要素法を組み合わせて，領域分割法により偏微分方程式を解くという研究がすでになされている．他の解法と組み合わせて半解析的数値解法を用いるということも，今後の研究課題として挙げられる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① <u>Hidenori Ogata</u>: Fundamental solution method for periodic plane elasticity, Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM), vol. 3, 249-267, 2008, 査読有
http://www.jnaiam.org/journals_view.php?jForm=&nid=6&volumes=3&issue=10

② <u>Hidenori Ogata</u>: Complex variable boundary element method for two-dimensional potential problems with one-dimensional periodicity, Numerical Analysis and Applied

Mathematics - International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2008 (eds. T.E. Simos, G. Psihoyios and Ch. Ch. Tsitouras), 411-414, 2008, 査読有.

③ 緒方秀教：1次元周期的2次元 Stokes 流に対する基本解法，京都大学数理解析研究所講究録，第 1566 号，119--131，2007 年，査読無.

④ Hidenori Ogata: Fundamental solution method for three-dimensional elasticity problems with two-dimensional periodicity, ICNAAM International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2006, 267-270, 2006, 査読有.

⑤ Hidenori Ogata and Kaname Amano: A fundamental solution method for three-dimensional viscous flow problems with obstacles in a periodic array, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 193, 2006, 302-318, 査読有.

⑥ Hidenori Ogata: A fundamental solution method for three-dimensional Stokes flow problems with obstacles in a planar periodic array, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 189, 622-634, 2006, 査読有.

〔学会発表〕(計８件)

① 緒方秀教：円板領域における様々な問題に対する代用電荷法の誤差について，日本応用数理学会 2008 年度研究部会連合発表会，2009 年 3 月 8 日，京都大学.

② 緒方秀教：周期的２次元ポテンシャル問題のための半解析的数値解法，応用数理に関する愛媛ワークショップ，2008 年 11 月 30 日，愛媛大学.

③ 緒方秀教：周期的２次元ポテンシャル問題のための半解析的数値解法，第１２回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム，2008 年 10 月 11 日，山形大学.

④ Hidenori Ogata: Complex variable boundary element method for two-dimensional potential problems with one-dimensional periodicity, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2008, 19 September 2008, Kos, Greece.

⑤ Hidenori Ogata: Boundary element method for spatially-periodic potential problems, ICIAM2007 - 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, 16 July 2007, Zürich, Switzerland.

⑥ 緒方秀教：周期的ポテンシャル問題に対する境界要素法，応用数学合同研究集会，2006 年 12 月 20 日，龍谷大学，大津.

⑦ 緒方秀教:周期場問題に対する代用電荷法および関連解法，福島応用数学小研究集会，2006 年 11 月 4 日，福島.

⑧ Hidenori Ogata: Fundamental solution method for three-dimensional elasticity problems with two-dimensional periodicity, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2006, 18 September 2006, Crete, Greece.

６．研究組織

(1)研究代表者

緒方秀教（OGATA HIDENORI）

電気通信大学・電気通信学部・准教授

研究者番号：５０２４２０３７

(2)研究分担者

なし　　　（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

なし　（　　）

研究者番号：