様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年３月３１日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2006～2008 年度
課題番号：18560426
研究課題名（和文）　非線形構造を考慮したロバスト最適化法とその非線形制御への応用

研究課題名（英文）　Robust Optimization Considering Nonlinear Structure and Its Application to Nonlinear Control

研究代表者
大石　泰章 (Oishi Yasuaki)
南山大学・数理情報学部・准教授
研究者番号：80272392

研究成果の概要：不確かなパラメータに非線形に依存するロバスト最適化問題について，非線形構造を考慮して保守的でない解を得る方法を研究し，さらにその制御への応用を行なった．具体的には，ロバスト最適化法の理論の研究として，解法の誤差評価と適応的精度向上の研究を行ない，合わせて解法が厳密になることの検証法を与えた．またロバスト最適化法の実用性向上の研究として，疎構造の利用による計算量の抑制や，未知関数を含むロバスト最適化問題のための解法の一般化を行なった．さらにロバスト最適化法の制御応用の研究として，制約を持つ非線形系の切替え型制御への応用を行なった．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,300,000	0	1,300,000
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	660,000	4,160,000

研究分野：工学
科研費の分科・細目：電気電子工学・制御工学
キーワード：制御理論

１．研究開始当初の背景

ロバスト最適化は，不確かなパラメータに非線形に依存する最適化問題を解く方法論である．工学において対象とするシステムが，モデル化誤差，実装時の誤差，環境の変化，経年変化などに起因して不確かさを持つことは多く，最適化を使って制御などの実際的な工学の問題を解く場合には，こうした方法論が本質的に重要となる．しかし，ロバスト最適化問題は，無限個の制約を持つ最適化問題と等価であり，直接これを解くことは難しい．従来制御理論の分野では，非線形構造を無視して保守的な解を求めるというアプローチが広く使われていたが，保守的すぎて解を見つけられないということも多く，新しい方法が望まれていた．

２．研究の目的

本研究の目的は，非線形構造を陽に考慮した，保守的でないロバスト最適化の方法論を確立し，さらに非線形制御やロバスト制御に

応用することである．より詳しくは，
(1) 理論の発展，
(2) 実用性の向上，
(3) 応用の開拓
の３分野を並行して研究することとし，特に研究代表者が開発した行列拡大法という解法に着目する．

３．研究の方法

「２．研究の目的」の項に記した，３つの研究分野に分けて記述する．

(1) 「理論の発展」の分野

本研究分野では，ロバスト最適化法の理論的性質を解明する．

最近のロバスト最適化法では，与えられたロバスト最適化問題を直接解くのではなく，その近似問題を生成してこれを解くが，近似問題を解く計算量が大きくなることをいとわなければ，いくらでも近似誤差を小さくすることができ，これを漸近的厳密性という．

漸近的に厳密なロバスト最適化法は２乗和多項式法などいくつか知られているが，計算量と近似誤差との定量的関係はほとんどわかっていない．研究代表者が開発した行列拡大法はこの関係がわかっていることが長所であり，これをさらに推し進めて，計算量が小さく近似誤差も小さい効率的な近似問題を作る方法を開発する．

また，２乗和多項式法や行列拡大法では，ある程度近似精度を上げると突然近似誤差が零になる現象が観察される．この現象がどのような状況で起きるかを解析し，近似誤差が零であることを検証する方法，最悪のパラメータを求める方法を開発する．

(2) 「実用性の向上」の分野

本研究分野では，ロバスト最適化法の計算量を小さくするとともに，より広いクラスの問題に使えるよう解法を拡張する．

ロバスト最適化問題は NP 困難であり，本質的に解くのが難しい問題である．このことを反映して，現実的なロバスト最適化問題を解こうとすると計算量が大きくなることが多い．これを抑制するため，与えられた問題の疎構造を利用することを考える．

また，制御で現れるロバスト最適化問題は未知関数やさらにその導関数を含むことがあるが，これらに適用できるようにロバスト最適化法を拡張する．

(3) 「応用の開拓」の分野

本研究分野では，開発したロバスト最適化法をロバスト制御，非線形制御に応用し，解法の実用性を検証するとともに，新しい応用を開拓する．

ロバスト制御では保守的でない解析・設計をするためにパラメータ依存 Lyapunov 関数の技術が広く使われている．この技術は，未知関数を含むロバスト最適化問題に定式化できるので，(2)で開発した解法を適用できるか検証する．

また，開発したロバスト最適化法が非線形構造を陽に扱えることに着目して，非線形 Lyapunov 関数の構成や，非線形制御則の設計に使うことを考える．

４．研究成果

本研究の成果は主に次の５つである：

「理論の発展」の分野：
(1) ロバスト最適化法の誤差評価と適応的精度向上，
(2) 厳密性の検証法，
「実用性の向上」の分野：
(3) 疎構造利用による計算量の抑制，
(4) 未知関数を含むロバスト最適化問題の解法，
「応用の開拓」の分野：
(5) 制約を持つ非線形系の切替え型制御．
以下順に説明する．

(1) ロバスト最適化法の誤差評価と適応的精度向上

行列拡大法では，不確かなパラメータの領域を複数の部分領域に分割することによって近似誤差を小さくする．このとき，どのくらい細かく分割すれば，どのくらい近似誤差が小さくなるかという定量的関係がわかっている．このことを利用して，計算量を抑制しつつ近似誤差も小さくなるような効率的な分割を適応的に生成する方法を開発した．

分割の細かさの指標として，当初は各部分領域の半径の最大値を使っていたが，これでは一様な分割が最適になってしまい，効率的とはいえない．研究によって，有効な部分領域の半径の最大値を使っても同様の定量的関係が得られることがわかった．これにより，粗い分割から始めて対応する近似問題を解き，有効な部分領域を見つけてこれを細分するという適応的方法を考えることができる．

また従来の２乗和多項式法では，誤差評価は与えられていたものの拡張性が低く，効率的な精度向上に使うことはできなかった．そこで行列拡大法と同様の領域分割によって精度向上を行なう新しい２乗和多項式法を考え，その誤差評価を与えた．この誤差評価のもとでは，適応的分割の方法を自然に導入でき，効率的に精度向上を行なうことが可能である．

(2) 厳密性の検証法

２乗和多項式法や行列拡大法など漸近的

に厳密なロバスト最適化法では，ある程度近似精度を上げると近似誤差が実質的に零になることが多い．このことが検出できれば，それ以上近似精度を上げる必要がないことがわかるので有用である．また，合わせて最悪パラメータもわかれば解析・設計に生かすことができる．本研究では，最悪パラメータが１つという仮定のもとで，行列拡大法に対する厳密性検証法を与えた．

最悪パラメータが１つのとき，近似誤差が零であることの必要十分条件として，近似問題の双対最適解がランクの低い特別な構造を持つことが導ける．この構造を持つかどうかの判定は半正定値計画問題に帰着でき，これによって厳密性の検証と最悪パラメータの計算が可能である．

同様の検証法は，２乗和多項式法に対するものなどいくつか与えられており，それら相互の関係は今後の研究課題である．また，(4)で紹介するようにロバスト最適化法は未知関数を含むロバスト最適化問題に拡張できるが，この場合に厳密性検証が可能であれば有用であると考えられ，これも今後の課題である．

(3) 疎構造利用による計算量の抑制

現実的なロバスト最適化問題を解こうとすると実行不可能なほどに計算量が大きくなってしまうことが多い．したがっていかにして計算量を抑制するかということはロバスト最適化法の応用において本質的に重要である．本研究では，行列拡大法において，与えられたロバスト最適化問題の疎構造を利用して計算量を小さくする方法を開発した．

与えられたロバスト最適化問題の制約をパラメータの多項式として表すとき，係数が零になる項が多いとする．このようなとき，与えられた問題は疎構造を持つと考え，この構造を rectilinear Steiner arborescence という特殊なグラフを使って抽出する．この arborescence に基づいて行列拡大を行なうことで，サイズの小さい近似問題を作ることができ，解くための計算量は小さくなる．従来の行列拡大法の長所は誤差評価が可能であること，適応的分割の技術が使えることであるが，これらを拡張することも可能である．

２乗和多項式法の文脈では，既に疎構造の利用法が提案されている．しかしその方法は今回提案した方法と大いに異なっており，両者の比較は今後の課題である．２乗和多項式法で疎構造を利用した場合，漸近的厳密性を示すことすら容易ではなく，増して誤差評価や適応的精度向上が可能であるかは不明である．行列拡大法でこれらが可能であることは，この方法の拡張性の大きさを表していると考える．

(4) 未知関数を含むロバスト最適化問題の解法

ロバスト制御において重要なパラメータ依存 Lyapunov 関数の技術をロバスト最適化問題に定式化すると，未知関数を含むロバスト最適化問題になる．行列拡大法をこのような問題に適用できるように拡張した．

提案する解法では，まず未知関数をある次数の多項式に限定して，有限次元のロバスト最適化問題を得，次にこれに行列拡大法を適用して近似問題を得てこれを解く．どちらの段階でも近似誤差が生じるが，これを領域分割を使って小さくする．すなわち，未知関数は分割に基づく区分多項式に限定し，行列拡大も分割に基づいて行なう．２種類の近似誤差の和に関して誤差評価が可能であり，さらに適応的分割によって効率的な分割を作成することも可能である．

パラメータ依存 Lyapunov 関数に関する研究は多いが，その近似誤差については定性的議論にとどまっており，本研究のように定量的議論を行なっているものはない．また，Lyapunov 関数の関数形も試行錯誤に基づいて定めており，本研究の方法のように系統的に定める考え方は意義が大きい．

(5) 制約を持つ非線形系の切替え型制御

ロバスト最適化法の非線形制御への応用として，制約を持つ非線形系の切替え型制御則の設計法を開発した．

現実のシステムは，その物理的要請により入力や状態に制約があることがほとんどである．このようなとき，制御器のゲインが高すぎると制約を破ってしまい，逆に低すぎると高い制御性能が得られない．この問題を解決するためにゲインの切替えを行なう．すなわち，複数のゲインに対して許容集合をロバスト最適化問題を解くことによって計算する．ここで許容集合とは，初期状態をその中に選べば以後の状態が制約を破らないような集合である．計算された許容集合に基づいてゲインの切替えを行なえば，制約を破ることはなく，しかも高い制御性能を実現できる．

非線形系の許容集合や吸引領域の計算にロバスト最適化法を適用する研究は多い．しかし本研究では，これを切替え型制御則の設計という観点で論じている．また，パラメータへの依存性が多項式的でない場合の対処法や，ロバスト最適化問題を解く計算量を小さくするための工夫についても考えており，より実用的見地に立っている．

このように多くの成果が得られたが未だ道半ばであり，例えば以下の課題についてはさらに研究が必要である：

(1) 近似誤差が零になるメカニズムの理解，

(2) 計算量の削減と解法の拡張,
(3) 現実的な制御問題における有用性の実証と新しい制御応用の開拓.

これらについては，平成21～23年度の科学研究費補助金基盤研究(C)「非線形構造を持つロバスト／非線形制御問題のためのロバスト最適化法」において，研究を継続する予定である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計９件）

①Y. Oishi, "An asymptotically exact approach to robust semidefinite programming problems with function variables," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 5, pp. 1000-1006, 2009, 査読あり.

②T. Jennawasin and Y. Oishi, "A region-dividing technique for constructing the sum-of-squares approximations to robust semidefinite programs," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 5, pp. 1029-1035, 2009, 査読あり.

③石川・大石, "制約を持つ非線形システムの切替え型制御：SICE-DD アームを例にして," 計測自動制御学会論文集, Vol. 45, No. 2, pp. 113-119, 2009, 査読あり.

④T. Jennawasin and Y. Oishi, "Sum-of-squares approximations to robust semidefinite programs with functional variables: a region-dividing approach," in *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, July 2008, pp. 1331-1336, 査読あり.

⑤Y. Oishi and Y. Isaka, "Exploiting sparsity in the matrix-dilation approach to robust semidefinite programming," in *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, New York, USA, July 2007, pp. 6169-6176, 査読あり.

⑥大石, "ロバスト制御とロバスト最適化：非線形の不確かさを扱うための解法," シミュレーション, Vol. 26, No. 2, pp. 95-100, 2007, 査読あり.

⑦猪阪・大石, "疎性の利用によるロバスト半正定値計画法の効率化," 計測自動制御学会論文集, Vol. 43, No. 2, pp. 93-101, 2007, 査読あり.

⑧Y. Oishi, "Reduction of the number of constraints in the matrix-dilation approach to robust semidefinite programming," in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, USA, December 2006, pp. 5790-5795, 査読あり.

⑨Y. Oishi, "A region-dividing approach to robust semidefinite programming and its error bound," in *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, Minneapolis, USA, June 2006, pp. 123-129, 査読あり.

〔学会発表〕（計１件）

①Y. Oishi, "A matrix-dilation approach to robust semidefinite programming," *Second Mathematical Programming Society International Conference on Continuous Optimization*, Hamilton, Canada, August 2007.

〔その他〕
研究成果 web ページ：
http://www.seto.nanzan-u.ac.jp/~oishi/papers-j.html

６．研究組織
(1) 研究代表者
大石　泰章（Oishi Yasuaki）
南山大学・数理情報学部・准教授
研究者番号：80272392

(2) 研究分担者
（平成18年度）
増淵　泉（Masubuchi Izumi）
広島大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：90283150

(3) 連携研究者
（平成20年度）
増淵　泉（Masubuchi Izumi）
広島大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：90283150

(4) 研究協力者
（平成20年度）
Tanagorn Jennawasin
豊田工業大学・大学院工学研究科・ポストドクトラル研究員
研究者番号：00520991