

研究種目：若手研究 (B)  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号：18740010  
 研究課題名 (和文) 次数2のジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開と関連する特殊関数の研究  
 研究課題名 (英文) Study of Fourier-Jacobi expansions for Siegel modular forms of degree two and associated special functions  
 研究代表者  
 平野 幹 (HIRANO MIKI)  
 愛媛大学・理工学研究科・教授  
 研究者番号：80314946

## 研究成果の概要：

本研究課題の主たる研究対象であるフーリエ・ヤコビ型球関数の決定についての予備研究において、十分に満足いく成果をあげることができた。主な成果は、 $Sp(3, \mathbf{R})$ のある一般主系列表現に対するホイッタカー関数および $GL(3, \mathbf{C})$ のクラス1でない主系列表現に対するホイッタカー関数の明示公式である。これらは保型形式に関連した球関数として最重要なものの一つであり、保型形式論とりわけ保型L-関数への応用が期待される。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,100,000	0	1,100,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	330,000	3,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：フーリエ・ヤコビ型球関数、フーリエ・ヤコビ展開、保型L-関数、ジーゲル保型形式、ホイッタカー関数

## 1. 研究開始当初の背景

保型形式、保型表現は整数論における重要

な研究対象のひとつである。とりわけ正則保型形式は古典的に詳しく研究されている。その一方で、実解析的であるが正則でない保型

形式については、例えば不連続群の  $L_2$ -コホモロジー群に関する松島-村上理論で自然に現れるなどその重要性の認識はあるものの研究の未発達さについては認めざるを得ない。

非正則保型形式に対する研究の進展が遅々としている原因の一つとして、関連する特殊関数の解析的性質、明示的フーリエ展開などの整数論的研究に必要な不可欠である基礎的研究があまり行われていないことが挙げられる。

このような観点から、多変数非正則保型形式の研究に対する基礎として、関連した特殊関数やフーリエ展開などの明示的研究は重要かつ急務であるといえる。

## 2. 研究の目的

次数 2 の実シンプレクティック群  $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$  上のフーリエ・ヤコビ型球関数とそのフーリエ・ヤコビ展開への応用について研究を行う。これまでに、いくつかの主要な系列に属する既約表現に対してフーリエ・ヤコビ型球関数を具体的に決定し、メイジャーの  $G$ -関数による表示を得ているが、本研究ではジークル極大放物部分群から誘導された主系列に属する表現に対してこの球関数の決定を試み、その成果をもとに、実解析的ジークル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開を考察し、実解析的ヤコビ形式との関係について研究する。

上記の主目的に加え、フーリエ・ヤコビ型球関数に類似の一般球関数についても研究を行い、ゼータ積分による保型  $L$ -関数への応用を試みる。

## 3. 研究の方法

まず、実解析的ジークル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開についての予備研究として、 $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$  のジークル極大放物部分群から誘導された主系列表現に対するフーリエ・ヤコビ型球関数の具体的決定について研究を行う。また、この研究を遂行するために  $\mathrm{Sp}(3, \mathbf{R})$  や  $\mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$  の (一般) 主系列表現に対するホイッター関数についての類似研究もあわせて行う。

球関数の決定においては、それらが必要条件としてみたすホロノミック系微分方程式を動径成分の座標について書き下し、明示的にその解を構成することが肝要である。しかし、この証明に要する計算は複雑かつ多大であるので、類似する球関数の研究により新たな知見を獲得しつつ、本研究に援用し、遂行する。

## 4. 研究成果

本研究課題の主たる研究対象である次数 2 の実シンプレクティック群  $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$  上のフーリエ・ヤコビ型球関数とその実解析的ジークル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開への応用については、残念ながら成果をあげるには至らなかった。しかしながら、予備研究・類似研究として行ったホイッター関数と呼ばれる類似の一般球関数については、大変満足いく成果をあげることができた。

具体的に本研究にて得られた成果を説明する。一つ目の成果は、次数 3 の実シンプレクティック群  $\mathrm{Sp}(3, \mathbf{R})$  のヤコビ放物部分群から誘導された一般主系列表現に対するホイッター関数の明示的決定である (論文②)。このホイッター関数について、本研究の開始以前に第二種ホイッター関数の明示公式までの成果を得ていたが、本研究において

さらに研究を進め、増大度に関してよい性質を持つ第一種関数についても明示的な積分表示を得、直交群上の同関数との関係について明らかにすることができた。二つ目の成果は、次数3の複素一般線型群  $GL(3, \mathbf{C})$  のクラス1でない主系列表現に対するホイッタカー関数の明示的決定と遺伝公式についての成果である(論文③・④)。このホイッタカー関数は一般にベクトル値であるため、その明示公式の記述には主系列表現の極小  $K$ -type に対する表現空間の基底をうまくとる必要がある。本研究においてはその基底としてゲルファント・ツェルビンスキー基底を採用し、その基底に関するホイッタカー関数の成分関数について、クラス1の主系列表現に対するホイッタカー関数の明示公式の自然な拡張と考えられる表示を得ることができた。さらに、次数2の同関数についても明示公式を決定し、これらの中に遺伝公式が成立することを示すことができた。この遺伝公式は、実一般線型群のクラス1主系列表現の場合に石井-Stade によって得られていたものに対する類似公式として重要視されるものであり、一般次数の場合にも成立することが期待される。実際、一般次数の場合にホイッタカー関数の明示的積分公式を得ることは先に述べた基底の選択の問題もあり困難であると思われるが、遺伝公式については十分に正しいと信じられる予想が本研究の過程で得られている。

予備研究・類似研究において研究対象としたホイッタカー関数は、保型形式に関連した球関数として最も重要な対象の一つである。成果②において  $Sp(3, \mathbf{R})$  のヤコビ放物部分群から誘導された主系列表現に対するホイッタカー関数と直交群の主系列表現に対するそれとの関連が示されたが、対応する群上の保型形式あるいは保型  $L$ -関数の間にも関連があることが期待される。また、成果③・④におけるホイッタカー関数の明示公式につ

いての成果は、ゼータ積分の評価による保型  $L$ -関数のガンマ因子の理論への応用が強く望まれるものである。

上記どちらのホイッタカー関数に関する成果も、幸いに国内外において高い評価を受けることができ、国際的なAクラス雑誌(数学界における最重要雑誌に数えられる)に掲載された。

今後は、本研究において得られた成果およびその過程で得られた新しい知見を、ジークル極大放物部分群から誘導された主系列表現に対するフーリエ・ヤコビ型球関数の研究ならびに次数2の実解析的な非正則ジークル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開の研究に援用しその研究を進展させること、予備研究の成果を基礎として保型形式の  $L$ -関数の理論への応用を実践すること、さらに高階代数群に研究対象を拡張同様な考察をし得られている予想を証明すること、などが今後の課題として挙げられる。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 4件)

- ① M. Hirano, T. Oda, Calculus of principal series Whittaker functions on  $GL(3, \mathbf{C})$ , Journal of Functional Analysis, 256, 2222-2267, 2009, 査読有
- ② M. Hirano, T. Ishii, T. Oda, Whittaker functions for  $P_J$ -principal series representations of  $Sp(3, \mathbf{R})$ , Advances in Mathematics, 215, 734-765, 2007, 査読有
- ③ M. Hirano, T. Ishii, T. Oda, Confluence from Siegel-Whittaker functions to Whittaker functions on  $Sp(2, \mathbf{R})$ , Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 141,

15-31, 2006, 査読有

- ④ M. Hirano, Propagation formula for principal series Whittaker functions on  $GL(3, \mathbf{C})$ , 成蹊大学理工学研究報告, 44, 17-23, 2007, 査読無

6. 研究組織

(1) 研究代表者

平野 幹 (HIRANO MIKI)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：80314946