様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２１年　５月　２５日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2006～2008
課題番号：18740037
研究課題名（和文）　作用素環を用いた位相的場の理論の研究

研究課題名（英文）　Research on topological quantum field theories by operator algebras

研究代表者
佐藤 信哉（SATO NOBUYA）
立教大学・理学部・准教授
研究者番号：60305662

研究成果の概要：無限次元の代数的対象（作用素環）は，自分自身のコピーをその内部に包含する．このとき，この包含にある種の有限性の条件を課すことにより，非常に興味深い現象が起こる．この現象は素粒子理論物理学，理論宇宙物理学と深くかかっており，また，幾何学における３次元の図形の分類にも深くかかわっている．本研究は，幾何学とのつながりを素粒子理論物理学の観点をヒントにして，先に述べた無限次元の作用素環の包含を幾何学的に実現しようとするものである．研究を積み重ねるにつれ，少しずつ概略がわかってきた．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,000,000	0	1,000,000
２００７年度	700,000	0	700,000
２００８年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,600,000	270,000	2,870,000

研究分野：作用素環論，低次元トポロジー
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：Subfactor 理論，3 次元多様体，Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量，Reshetikhin-Turaev 型位相不変量，Doplicher-Roberts duality，Cuntz 環，fusion rule algebra，twisted K-theory.

１．研究開始当初の背景

(1)

2003～2005 に若手研究（B）の課題として採択された「作用素環論の低次元トポロジーへの応用」(研究課題番号：15740043)において，作用素環論における subfactor 理論を用いて構成される２種類の（２+１）次元位相的場の理論（以下，TQFT）Turaev-Viro-Ocneanu 型，Reshetikhin-Turaev 型について，位相不変量としての等式が成り立つことが示された．その後，Turaev-Viro-Ocneanu 型不変量について，その構成の際に使われれる tensor category が premodular であるとき，それを modular 化した modular category を用いた Reshetikhin-Turaev 型位相不変量による記述を得た．一方で，素粒子理論物理学における topological string の理論において，上に述べた等式に類似の結果が得られている．物理学における関係式においては，ある種の

積分変換を用いると関係式が得られることがわかっていた（大栗-Strominger-Vafa）.

(2)
Reshetikhin-Turaev 型位相不変量についての性質は多くの研究者によって研究されているが，Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量については，世界的に見ても研究者は多くはなかった.

研究代表者と和久井道久氏（関西大学）の共同研究により，数式処理ソフトウェアを用いていくつかの３次元多様体についてTuraev-Viro-Ocneanu 位相不変量の値を計算した．その結果，Turaev-Viro-Ocneanu 位相不変量は，多様体の基本群の情報に依存していることが観察された.

(3)
Subfactor は Jones 指数が４未満のときは，Dynkin 図形（A_n，D_{2n}，E_6，E_7，E_8 型）を用いて特徴付けられることが知られている．これらが幾何学的特異点の理論や McKay 対応と関係があるかについては，関係を示唆する結果もなく，まったくの未解決問題である.

２．研究の目的

(1)
Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量の位相的性質を明らかにすることが目的の１つであった.

(2)
Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量とReshetikhin-Turaev 型位相不変量の間の等式の証明をより簡明にすることが目的の１つであった.

(3)
Jones 指数が４未満の subfactor を幾何学的に実現することにより，幾何学的特異点の理論あるいは McKay 対応との関係を明らかにすることが目的の１つであった.

３．研究の方法

(1) Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量の位相的性質について.

レベル 3k の SU(3)-Wess-Zumino-Witten 模型に対応する subfactor を用いて，レンズ空間 L(7,1)と L(7,2)の Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量の値を数式処理ソフトウェアを用いて，計算する予定であったが，後に述べるように，この計算はまだ行われていない.

（2）Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量とReshetikhin-Turaev 型位相不変量の等式についての意味づけについて.

素粒子物理学における結果のように，何らかの積分変換が２つの位相不変量を結びつけるものと思われることから，積分変換によって，２つの多様体などを結びつけるような研究について様々な角度から研究を行った.

(3) Subfactor の幾何学的実現について.

３つのアプローチを考えた.
①A.Wassermann によるループ群を用いた共形場理論の構成を利用する.
②Doplicher-Roberts による symmetric C^*－tensor category についての双対性を一般化する.
③N=2 Landau-Ginzburg 模型を利用する.

４．研究成果

(1) Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量の位相的性質について.

レベル 3k の SU(3)-Wess-Zumino-Witten 模型に対応する subfactor から得られる C^*－tensor category は，退化した braiding を持つ.そこで,この tensor category に tensor category としての quantum double 構成法である center construction を施して modular category を得る．ところがこの modular category は，元の category とその opposite な category のテンソル積には分解しない.
このような退化した braiding を持つ C^*-tensor category の center construction については，私の以前の研究で明らかになっており，特に，center construction を施した後に得られる C^*-tensor category から構成される Reshetikhin-Turaev 型位相不変量は，center construction を施す前のもともとの C^*-tensor category の braiding のうち非退化なものを使って構成される Reshetikhin-Turaev 型の絡み目の不変量を用いて記述されることがわかる．この結果を適用して レンズ空間 L(7,1)と L(7,2)の Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量の値を数式処理ソフトウェアを用いて計算する際に，コンピュータへの負荷が大きすぎて，計算がうまくいかなかった．現在，計算の仕方やプログラムを見なおしている状態である.

一方，Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量について，ホモトピー的場の理論を用いて，この不変量を分解する一般論が J.Petit によって示された．この結果から，Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量がどの程

度基本群に依存するものであるかを現在研究中である.

(2) Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量とReshetikhin-Turaev 型位相不変量の等式についての意味づけについて.

① Weak Hopf C^* - 環を使うアプローチ.

Jones 指数が有限な subfactor から得られる C^* - tensor category の既約な各 object (のユニタリ同値類) の個数が有限であるとき, subfactor は finite depth を持つという. Nikshych-Vainerman は, finite depth を持つ II_1 型 subfactor の持つ C^* - tensor category は, ある有限次元 weak Hopf C^* - 環の表現のなす C^* - tensor category と同値であることを示した. この結果から, finite depth を持つ subfactor から得られる C^* - tensor category を用いて構成される Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量は, それと同値であるような有限次元 weak Hopf C^* - 環 H の表現のなす C^* - tensor category Rep(H)を用いて構成したものと全く同じものとなることがわかる. 河東-佐藤-和久井の結果によれば, Rep(H)を用いて構成した Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量は, Rep(H)の tensor category としての quantum double 構成法である center construction を施して得られる C^* - tensor category D(Rep(H)) (これは非退化な braiding を持つ modular category である) を用いて構成される Reshetikhin-Turaev 型位相不変量に等しい.

この等式をより概念的な枠組みを持つものとして証明するために, Alekseev-Grosse-Schomerus による combinatorial Chern-Simons theory の方法を用いた. 彼らは, 有限次元 Hopf algebra を用いて, Reshetikhin-Turaev 型位相不変量に類似の位相不変量を導入した. (私の知る限りでは, この位相不変量が Reshetikhin-Turaev 型位相不変量と等しいことは示されていない.) Alekseev-Grosse-Schomerus による位相不変量に付随して得られる moduli algebra は元の Hopf algebra の quantum double であることを F.Nill は示した.

この枠組みは, 有限次元 weak Hopf C^* - 環の場合でも正しいことを私は確かめた (未発表). しかしながら, このように拡張した combinatorial Chern-Simons theory が Turaev-Viro-Ocneanu 型の状態和を用いた位相不変量に等しくなることについては未だに証明の糸口が見えておらず, 今後の課題となっている.

② Open string theory としの Chern-Simon theory によるアプローチ.

実 3 次元多様体 M の余接束 T^*M は 6 次元シンプレクティック多様体であり, また自然にケーラー多様体とみなすことができる. 実際, T^*M は複素 3 次元の Calabi-Yau 多様体となることが知られている. 結果として, M 上の SU(2) Chern-Simon theory は open string theory と考えることができる (E.Witten).

一方で, Turaev-Viro-Ocneanu 型位相不変量は, 量子重力理論と関連していることが知られている. また, string theory において重力を取り込むためには, closed string を必要とする.

これらのことから, 次の表にある対応を考えた.

位相不変量の型	String theory
Turaev-Viro-Ocneanu	closed string
Reshetikhin-Turaev	open string

表の左にある等式に対して, 概念的な証明を行うために, 表の右側にある「対応」についていろいろと string theory の文献を調べているが, M を Lagrangian submanifold に持つ 3 次元の Calabi-Yau 多様体 T^*M について, T^*M は別の Calabi-Yau 多様体に代わってもよいが, その中にある Lagrangian submanifold M を保つような変換あるいは対応は今のところ見つかっていない. (これが物理的に意味のあることなのかどうかは, 私にはわからない.) 今後の研究に期待したい.

(3) Subfactor の幾何学的実現について.

2006 年 6 月に開催された国際会議 Poisson2006 に参加し, C^* - 環の twisted K-theory を用いることにより, subfactor を (非可換) 幾何学的に実現するためのアイディアを思いついた. Freed-Hopkins-Teleman は, SU(2) Wess-Zumino-Witten 模型における fusion rule を SU(2) - equivariant twisted K-theory により記述することに成功している. しかしながら, 彼らの方法はあまり見通しのよいものとはいえない.

一方, Doplicher-Roberts の結果により, symmetric C^* - tensor category の各 object は, object の間の intertwiner の生成元のなす C^* - 環である Cuntz 環を利用することにより, ある C^* - 環上の endomorphism として実現されることが知られており, これらは実際にあるコンパクト群の表現から得られるという著しい結果がある (Doplicher-Roberts duality). また, その結果, 有限次元ユニタリ群の部分群としての

SU(n)は，Cuntz 環上へ表現されることが知られている．泉正己（京都大）は，この結果を使って,ある種の subfactor の fusion rule algebra を Cuntz（-Krieger）環上の endomorphism として実現し，そこから実際に subfactor を構成し，これらの endomorphism が与えられた fusion rule algebra と同じものであることを示した． しかしながら，この方法は任意の subfactor に対して適用ができるものではない．

上に述べた equivariant twisted K-theory と Doplicher-Roberts duality をあわせた方法が，subfactor とは別の動機から E.Vasselli（ローマ大）によって提唱されている．これは，Doplicher-Roberts duality を新たな観点から見直すプロジェクトであると受け止めることができる．実際，ファイバーとして symmetric C^* - tensor category を持つような C^* - 環の連続変形を考え，その（equivariant）K-theory を考えることにより，コンパクト群を構成し，その表現が与えられた symmetric C^* - tensor category を持つようにするというものである．これは次の理由でもっともな方針であるといえる．量子群（単純リー環の universal enveloping algebra の q 変形）の表現論においては，q が 1 のベキ根でない場合には，旗多様体上の直線束上にその表現を構成することができる．Vasselli の結果は，量子群ではないが，コンパクト群の表現に対して，類似のアプローチをしているように思われる．

そこで，H.Wenzl が構成した，量子群の q が 1 のベキ根の場合の表現から得られる C^* - tensor category を考え，この場合に Vasselli の方法を適用することを考えた．（Wenzl の C^* - tensor category は，Jones 指数が 4 未満の subfactor に対応していると考えられる．）Cuntz 環上のファイバーとして Wenzl の C^* - tensor category を載せるために，Recknagel らによって導入された amplimorphism の考えを使って，C^* - 環を構成し，その twisted K-theory を計算する方針であるが，現在，その研究の途中の過程である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）
Nobuya SATO, Recent Development in Subfactor Theoretic Approach to (2+1)-dimensional Topological Quantum Field Theory，京都大学数理解析研究所講究録 1534 巻(2007 年)，38-50．査読なし．

〔学会発表〕（計 1 件）
Nobuya SATO, Recent Development in Subfactor Theoretic Approach to (2+1)-dimensional Topological Quantum Field Theory， 京都大学数理解析研究所 研究集会「作用素環論の発展」，2006 年 9 月 6 日．

６．研究組織
(1)研究代表者
佐藤 信哉（SATO NOBUYA）
立教大学・理学部・准教授

(2)研究分担者

(3)連携研究者