様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21　年　6　月　2　日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：18740070
研究課題名（和文）局所構造と大域構造の有機的聯関を指向した確率解析の展開

研究課題名（英文）Development of stochastic analysis toward to organic connections between local structures and global structures

研究代表者
日野　正訓（Hino Masanori）
京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号：40303888

研究成果の概要：

経路空間を典型例とする無限次元空間や，フラクタル集合などの複雑な空間において，特に局所構造や大域構造に着目した確率解析の理論を展開した。滑らかな空間に適用できる様々の理論が利用できないため，このような研究には新たな解析手段を開発することが必要となる。今回の研究においては無限次元空間，フラクタル集合それぞれにおいて順当な問題をいくつか設定し，その解答を与えることを通じて新たな理論の展開を行った。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
平成 18 年度	**1,200,000**	**0**	**1,200,000**
平成 19 年度	**1,200,000**	**0**	**1,200,000**
平成 20 年度	**1,100,000**	**330,000**	**1,430,000**
年度			
年度			
総　計	**3,500,000**	**330,000**	**3,830,000**

研究分野：確率論
科研費の分科・細目：確率解析学
キーワード：確率解析，無限次元空間，フラクタル，自己相似集合，ディリクレ形式，抽象ウィナー空間，有界変動関数，エネルギー測度

１．研究開始当初の背景

ノイズの影響を付加した微積分学とでもいうべき確率解析の理論は，これまで長足の進歩を遂げてきた。基礎となる確率微分方程式の理論は，1 つの見方として，2 階微分作用素からなる“ベクトル場”と確率過程との対応を，ベクトル場とその積分曲線との対応のアナロジーとして厳密化したものといえる。この場合，底空間は多様体など，微分構造を持つ空間である必要がある。
　一方で，近年確率論が対象とする空間は，無限次元空間やフラクタル集合などのより複雑な空間へと広がりを見せてきている。このような空間においては確率微分方程式は利用困難な場合が多いが，確率過程を構成する別の方法として，ディリクレ形式の理論の有用性がここ 20 年ほどで強く認識されるよ

うになってきた。これは一般論としては底空間の構造を殆ど必要としないため適用範囲が広く，この方面の研究も現在に至るまで一層の発展を遂げつつある。しかしながら，ディリクレ形式によるアプローチでは，局所的な構造（2 階微分作用素に相当，その他種々の次元量やエネルギー測度，定義域の関数空間などをもここでは意味する）と大域的な構造（確率過程に相当）が具体的にどのように対応付けられているかが必ずしもわかりやすい形で記述されているとは言えず，そのことに起因する理論上の困難が多く残されている。この点をより明らかにすることは今後更なる理論の発展のためには重要であると考えられる。以上が本研究の動機づけとなる背景である。

２．研究の目的

本研究課題においては，このような確率解析の研究の現状に鑑み，特に次の点に主眼を置いた理論展開を目指した。

『一般の底空間において定義されたディリクレ形式に対応する確率過程の局所構造と大域構造を繋ぐメカニズムを明らかにすること。』

これに関しては，確率微分方程式の強解として確率過程が与えられている場合は状況がよく理解されているといって良い。ディリクレ形式の理論の枠組では，底空間が多様体でない場合は有用な一般論はいまだ少ない。そこで，以下のような具体的問題を指針として本研究の遂行に臨んだ。

(1) フラクタル上で定義された自然な確率過程に対して，そのマルチンゲール次元を具体的に求める。

より粗いレベルの議論と見なせるエネルギー測度の特異性については，研究代表者の以前の研究により一般論が構築されている。この議論を発展させることにより，特に 15 年来未解決である「ネステッド・フラクタル上の自然な対称拡散過程のマルチンゲール次元は 1」という予想の解決に迫る。

(2) 確率過程にディリクレ形式が対応しているとき，その定義域の関数空間としての性質を調べる。

ユークリッド空間上の標準的なディリクレ形式の定義域は１階の L^2-Sobolev 空間であるが，典型的なフラクタル集合の場合は Besov 空間で表されることが知られている。飛躍型確率過程が対応するそのトレース空間も（指数の異なる）Besov 空間であることが最近の研究で分かっている。これらの関数空間の更なる性質を調べることは，対応する確率過程の構造を調べる上で自然な問題である。

(3) 無限次元空間における準正則局所ディリクレ形式について，対応する拡散過程の具体的な記述を与える。

例えば反射壁拡散過程が Skorohod 分解表示を持つかどうかというのが問の主旨である。これは現在針谷祐氏（東北大学）や Zambotti 氏（Milano 大学）が精力的に行っている無限次元反射壁拡散過程の研究と密接に関連している。

これらの研究を進めることによって確率解析の理論展開における種々の障害を解消し，より一般的で複雑な状況でも適用しうる理論を確立するとともに，更には古典的な場合へのフィードバックを図ることで，この分野における新たな知見を獲得することを本研究の目的とした。

３．研究の方法

上記(1)～(3)の研究方法に関して述べる。

(1) ネステッド・フラクタル上の自然なディリクレ形式に関するエネルギー測度は，ランダム行列の無限積を用いて表示できることが知られている。問題はその極限における行列の階数をどう求めるかということであり，行列が退化する状況をうまくとらえる必要がある。Perron-Frobenius の定理は直接適用できないものの，類似した定理を確立できれば事態を打開できる可能性があるため，そのような一般化について考察を進めることにより問題の解決を図る。

(2) 典型的なフラクタル上のディリクレ形式の定義域は分数階の Besov 空間であり，通常の意味では底空間にも関数空間にも微分構造は入っていない。しかしながら，ディリクレ形式が強局所性を持てば，エネルギー測度は Leibniz 則をみたす。このことを用いて，ある種の微分構造の存在がいえるのではないかという問題意識に基づいて考察を進める。

(3) 適当な空間が与えられたとき，それを状態空間とする自然な拡散過程を構成するという問題は確率論において最も基本的なものの一つである。特に境界が存在するとき，

ランダムに動く粒子がその境界で反射するような拡散過程の構成は一般には容易ではない。区間上の R＾d-値連続関数からなるようなパス空間は典型的な無限次元空間の例であるが，その領域上の拡散過程は，R^d の領域内をランダムに動く弦の運動を記述していると解釈され，物理現象の記述という見地からも自然な対象であるといえる。このような対象を扱うため，ディリクレ形式の理論を援用するのみならず，幾何学的測度論のアイディアも取り入れて考察を行う。

４．研究成果

(1) ネステッドフラクタルを含む，ある範疇の p.c.f.自己相似集合に対して，その上の自然な拡散過程のマルチンゲール次元が１であることを証明した。これは 1980 年代後半にシェルピンスキーガスケットの場合にのみ知られていた事実で，一般の場合は未解決の問題であり，解析手段も確立されていなかった。今回，この問題に対する新しいアプローチ方法を発見し，問題の解決に至った。

(2) 一般の空間における正則強局所ディリクレ形式に対して指数という概念を解析的な方法で定義し，対応する拡散過程のマルチンゲール次元に一致することを示した。これにより確率論的な対象と解析的な対象との間の関連が 1 つ明らかになったことになる。この事実の応用として，自己相似フラクタル集合の上の適切な関数空間における微分構造の存在に関する研究を行った。特に，p.c.f.自己相似集合でマルチンゲール次元が１であるものに対して，次の主張を証明した：
『適切な参照関数が存在して，Dirhchlet 形式の定義域に属する任意の関数は，参照関数とのミクロスケールにおける変動比として“１階導関数”を定義することができ，参照関数のエネルギー測度に関する“１階導関数”の 2 乗積分はディリクレ形式の値に一致する。』
このことは，微分構造を持たないフラクタル集合に対しても，その上の適切な関数空間においては微分構造を持ち得ることを意味するものである。

(3) 無限次元空間上の有界変動関数と対応する確率過程の性質に関する理論を援用することにより，外部一様球条件という条件を新たに導入した上で，この条件の下，パス空間の領域の定義関数が有界変動関数であることを示すことによってその上の自然な拡散過程である反射壁 Ornstein-Uhlenbeck 過程の Skorohod 表現を得た。更に容量に関する詳しい評価を求めることで，この拡散過程の反射が起こる場所が領域の位相境界より遙かに小さい集合であることを証明した。この結果はL. Zambotti 氏と針谷祐氏による先行研究の，ある意味での一般化および拡張になっているのみならず，このテーマにおける研究に新たな解析方法を導入しその有効性を示したという意義を持つ。

(4) 経路空間を典型例とする無限次元空間上の確率解析に関連した研究を行い，特に有界変動関数の理論の展開を推し進めた。従来の研究で，抽象ウィーナー空間上の有界変動関数には１階微分に相当するヒルベルト空間値の測度が付随することが知られていたが，その測度の存在証明は抽象的な構成によるものであり，測度の具体的な意味付けはなされていなかった。今回の研究で，有界変動関数がある集合の定義関数であるという典型的な場合において，対応するヒルベルト空間値測度の全変動測度が，集合の測度論的境界の，余次元１のハウスドルフ測度として表現されることを証明した。ここで抽象ウィーナー空間上のハウスドルフ測度はFeyel氏とde La Pradelle 氏による先行研究に従って定義されるものであり，測度論的境界は本研究で新たに導入されたものである。この表現はユークリッド空間における同様の結果と類似しているが，ユークリッド空間の場合に証明の鍵となるルベーグ測度の二倍条件が無限次元空間上のガウス測度では成立しないことに注意する。この結果により，ガウス・グリーン型の部分積分公式や，対応する反射壁 Ornstein-Uhlenbeck 過程の Skorohod 表現に現れる測度が境界集合の表面測度であるという自然な解釈を正当化することができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

(1) Masanori Hino and Hiroto Uchida, Reflecting Ornstein-Uhlenbeck processes on pinned path spaces, Proceedings of RIMS Workshop on Stochastic Analysis and Applications, 111-128, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B6, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008. （査読有）

(2) Masanori Hino, Martingale dimensions for fractals, Annals of Probability, Vol. 36 (2008), 971-991. （査読有）

(3) Masanori Hino and Takashi Kumagai, A trace theorem for Dirichlet forms on fractals, Journal of Functional Analysis,

Vol. 238 (2006), 578-611. （査読有）

(4) Masanori Hino and Kenji Nakahara, On singularity of energy measures on self-similar sets II, Bulletin of the London Mathematical Society, Vol. 38 (2006), 1019-1032. （査読有）

〔学会発表〕（計 6 件）

(1) 日野正訓, Energy measures and derivatives on some fractals, 日独共同研究 Stochastic Analysis and Applications 2008, 西新プラザ（福岡市）, 2008 年 9 月.

(2) 日野正訓, Energy measures and derivatives on p. c. f. self-similar sets, 3rd Conference on Analysis and Probability on Fractals, Cornell University, 2008 年 6 月.

(3) 日野正訓, Sets of finite perimeter and Hausdorff measures on the Wiener space, 2nd International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, Seoul National University, Korea, 2008 年 5 月.

(4) 日野正訓, Reflecting Ornstein-Uhlenbeck Processes on Path Spaces, Stochastic Analysis and Applications, Kyoto University, 2006 年 9 月.

(5) 日野正訓, Martingale dimensions for fractals, Mathematics on Fractals 2006, Kyoto University, 2006 年 9 月.

(6) 日野正訓, Reflecting Ornstein-Uhlenbeck Processes on Path Spaces, International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, University of Washington, 2006 年 8 月.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者

日野　正訓（Hino Masanori）
京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号：40303888