

平成 21 年 5 月 29 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2006～2008

課題番号：18740072

研究課題名（和文）非線形波動の大域分散性

研究課題名（英文）Global dispersion of nonlinear waves

研究代表者 中西賢次（NAKANISHI KENJI）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：40322200

研究成果の概要:様々な波動現象を普遍的に記述する非線形シュレディンガー方程式を中心に、非線形分散型方程式の解の挙動を調べた。特に、プラズマ波動の記述について高階近似モデルからの極限移行を広汎なクラスの解で示し、典型的な特解として反発性の場合に3次元平面波の漸近安定性、また球面值の場合に調和写像について漸近安定性を示した。また非線形クライン・ゴルドン方程式について散乱・爆発解の分類、非線形シュレディンガー方程式へのノルム移行、調和写像熱流における調和写像の永久振動などの結果も得た。これらの過程で、線形評価と非線形評価を相補的に組み合わせ、挙動の異なる成分間の相互作用や異なる状態への遷移を捉える手法をいくつか考案した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,300,000	0	1,300,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	300,000	3,800,000

研究分野：偏微分方程式

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：非線形波動・分散性・漸近解析・散乱理論

1. 研究開始当初の背景

水面波やプラズマなどの非線形波動を記述する様々な偏微分方程式において、解の挙動を決定するのは波の非線形共鳴と分散性のバランスである。しかし一般の解についてこの両者が混在する形で大域的に解析できている研究結果は、完全可積分系のような特別な方程式を除くとほとんど無く、その理由は非線形相互作用が顕在する状況での分散性を数学的に捉える手法が十分発達していないためであった。

2. 研究の目的

非線形波動の分散性の評価を、時空および関数空間において大域的に導出する手法を開発する。その重要な過程として、波の分散性に起因する解の可積分性・無限遠での減衰度・滑らかさの増大などに関する評価を改良・開発する。最終目標は有限エネルギー解のような一般の解に対して、共鳴・分散の混在を含めた時空大域挙動の完全な分類を与える事だが、当研究費の期間内には、現状の

摂動論から次のステップとして、本質的に異なる2種類の解(散乱状態、孤立波解、爆発解およびこれらの中間状態など)の間の時間的遷移の有無、および関数空間での位相的關係についてできるだけ多くの解明例を出す事を目指す。

3. 研究の方法

調和解析など精密な議論による線形評価と、方程式の対称性を反映したエネルギー法などの非線形評価とを相補的に統合し、非線形共鳴と分散性の混在が引き起こす非一様・非単調な構造を時空座標と関数空間の両面から解明する。具体的には、非線形大域分散性評価に関数空間での高次構造を導入することで、非単調な分散構造の解・方程式へ拡張する。線形の精密な分散評価を時空及び関数空間において局所的に取り込むために、従来の線形理論における様々な手法を見直し、上記の目的に即して改良、統合を試みる。また、非線形解の大域挙動を調べる前段として、特異極限問題における非線形共鳴と分散の関係を調べる。特に、共鳴成分を線形分散評価で制御しきれない場合における、非線形分散評価を求める。そして、非一様・非単調な状況での様々な分散性に対する評価を組み合わせるために、時空及び周波数、さらに関数空間での局所化を統合した形で調和解析を展開する。

4. 研究成果

(1)非線形シュレディンガー方程式に依るプラズマ波動記述の正当性について、高階近似のザハロフ系及びクライン・ゴールドン・ザハロフ系からの特異極限移におけるエネルギー空間での解の強収束を証明した。その際、プラズマ中の電気振動の唸りとイオン音波との共鳴により、多重線形評価では非有界となってしまう成分を制御するために修正(非線形)エネルギーを導入した。また、その研究の過程でザハロフ系の有限エネルギー会を含む、弱解の広いクラスでの無条件一意性を調べ、逐次代入に沿って関数空間を漸近的に改良する手法を考案した。

(2)非線形シュレディンガー方程式の解の時空大域挙動について、反発性非線形項に対する3次元平面波の漸近安定性を重み付きエネルギー空間の初期擾乱に対して示し、また線形化方程式の任意の有限エネルギー解に対してそれに漸近する非線形解の存在を示し、その中で、エネルギーの空間減衰が遅いと時間漸近挙動が線形化方程式から2次修正される事を示した。このために、非共鳴相

互作用による見かけの特異性を方程式から除去する変数変換を発見し、また量子流体音速に近い成分に対する非共鳴性の退化に対処するために、特異性を許す双線形時空フリー工積評価を考案した。また、2次元平面波に漸近する解はいくら摂動が小さくても本質的な2次修正を受ける事を示した。

(3)強磁性体のモデルであるランダウリフシッツ方程式(調和写像熱流とシュレディンガー写像を特別な場合を含む)について、平面から球面への回転対称性の下で基底状態(調和写像)のエネルギー空間での漸近安定性を示し、その過程で、回転数に応じた基底状態の空間分布の違いが時間大域挙動に影響を与える事を示した。特に回転数が2で熱流方程式の場合は、調和写像がスケール変化による集約・拡散の遷移を永遠に繰り返すような、有限エネルギーの初期値クラスが存在する事を示した。これは分散(拡散)成分の無限次元部分が、有限次元の基底状態集合上の軌道に本質的な影響を与える事を示しており、証明上ではそれら2成分への分解を(通常と異なり)線形化作用素と互換性の無い局在化された直交条件を用いて非直交の直和分解を用いるアイデアが本質的である。また技術的には空間2次元での2重端点指数に対するストリッカー時空評価が0以外の回転数の関数に対しては成り立つ事を示した。

(4)非線形クライン・ゴールドン方程式の解の大域挙動について、2次元の反発的指数型非線形項で臨界エネルギー値における散乱理論を構成した。この問題は3次元以上のエネルギー臨界の場合と異なり、エネルギー集約が起こると時間局所的なストリッカー時空評価自体が発散してしまう(3次元以上ではコンパクト性のみ破れる)点において非線形性が強いといえるが、エネルギーの集約半径の時間発展をモラベッツ型先験評価のみで制御するという方法で解決した。さらに、一般の次元及び一般の吸引的非線形項について、基底状態エネルギー以下の解が散乱性と爆発性に分類できる事を示した。

特に2次元原子数型の場合は基底エネルギーがエネルギー臨界値を下回る事を示した。

(5)3次元空間から双曲平面への波動写像について、十分小さな解は大域分散性を持つ事を示し、その時空減衰挙動を記述した。

(6)スケール不変の非線形シュレディンガー方程式とその相対論版である非線形クライン・ゴールドン方程式との関係について、スケール不変性に適合した時空大域ノルムは

クライン・ゴルドンで成り立てば自動的にシュレディンガーへ移行する事を示した。特にエネルギースケール不変の場合に解の大域挙動を制御できるノルムとして、散乱状態への遷移時間を測るノルムを導入した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

1. Slim Ibrahim, Mohamed Majdoub, Nader Masmoudi and Kenji Nakanishi, Scattering for the 2D energy critical wave equation, to appear in Duke Math. J. (査読有・掲載決定)

2. Stephen Gustafson, Kenji Nakanishi and Tai-Peng Tsai, Scattering theory for the Gross-Pitaevskii equation in three dimensions, to appear in Commun. Contemp. Math. (査読有・掲載決定)

3. Nader Masmoudi and Kenji Nakanishi, Uniqueness of solutions for Zakharov systems, to appear in Funkcial. Ekvac. (査読有・掲載決定)

4. Kenji Nakanishi, Transfer of global wellposedness from nonlinear Klein-Gordon equation to nonlinear Schrodinger equation. Hokkaido Math. J. 37 (2008), no.4, 749-771. (査読有)

5. Nader Masmoudi and Kenji Nakanishi, Energy convergence for singular limits of Zakharov type systems. Invent. Math. 172 (2008), no.3, 535-583. (査読有)

6. Joachim Krieger and Kenji Nakanishi, Large time decay and scattering for wave maps. Dyn. Partial Differ. Equ. 5 (2008), no.1, 1-37. (査読有)

7. Shu-Ming Chang, Stephen Gustafson, Kenji Nakanishi and Tai-Peng Tsai, Spectra of linearized operators for NLS solitary waves. SIAM J. Math. Anal. 39 (2007/2008), no.4, 1070-1111. (査読有)

8. Stephen Gustafson, Kenji Nakanishi and Tai-Peng Tsai, Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation in two and three dimensions. Ann. Henri Poincare 8 (2007), no.7, 1303-1331.

(査読有)

[学会発表](計13件)

1. Kenji Nakanishi, Scattering and blow-up for nonlinear Klein-Gordon equations, Nagoya Workshop on Differential Equations, 2009年2月3日, 名古屋大学.

2. Kenji Nakanishi, Asymptotic stability and pulsation of harmonic maps for the Landau-Lifshitz-Gilbert equation, Nonlinear Wave and Dispersive Equations, 2009年1月26日, 京都大学.

3. 中西賢次, Asymptotic dynamics for nonlinear Schrodinger equations, I, II, 微分方程式の総合的研究, 2008年12月20・21日, 京都大学.

4. Kenji Nakanishi, Asymptotic stability of plane waves for the nonlinear Schrodinger equation, Linear and Nonlinear Waves, No.6, 2008年12月9日, ピアザ近江.

5. Kenji Nakanishi, Scattering for the 3D Gross-Pitaevskii equation, The Gross-Pitaevskii equation and related topics, 2008年10月16日, Porquerolles, フランス.

6. Kenji Nakanishi, Scattering for the Gross-Pitaevskii equation in three dimensions, Conference on Partial Differential Equations and Applications, 2008年3月28日, Hammamet, チュニジア.

7. Kenji Nakanishi, Uniqueness of weak solutions for Zakharov-type systems, Young Asian Conference on Partial Differential Equations, 2008年1月28日, Postech, 韓国.

8. Kenji Nakanishi, Scattering for the Gross-Pitaevskii equation, Nonlinear Waves and Dispersive Equations, 2007年9月9日, Oberwolfach, ドイツ.

9. Kenji Nakanishi, Scattering theory for the nonlinear Klein-Gordon equations in the Sobolev critical case in two dimensions, Non-linear hyperbolic equations and related topics, 2007年9月7日, Centro De Giorgi, イタリア.

10. 中西賢次, 非線形分散波動の漸近解析, 日本数学会年会(総合講演), 2007年3月28日, 埼玉大学.

11. 中西賢次, Energy convergence in various singular limits of the Zakharov system, Linear and Nonlinear Waves, No.4, 2006年11月6日, 大阪大学.

12. Kenji Nakanishi, Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation, AIMS' Sixth International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2006年6月25日, Poitiers, フランス.

13. Kenji Nakanishi, Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation in two spatial dimensions, The Gross-Pitaevskii and related equations with non-zero boundary conditions at infinity, 2006年6月14日, Wolfgang Pauli Institute, オーストリア.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中西賢次

(京都大学・理学研究科・准教授)

研究者番号: 40322200