

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18H01118

研究課題名(和文)リーマン多様体の収束・崩壊理論の新展開

研究課題名(英文) New development of the theory of convergence and collapsing of Riemannian manifolds

研究代表者

山口 孝男 (Yamaguchi, Takao)

筑波大学・数理解物質系(名誉教授)・名誉教授

研究者番号：00182444

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,000,000円

研究成果の概要(和文)：(1)断面曲率が下に有界で、境界の第2基本形式が一様に有界であるような境界つきリーマン多様体の無限列のグロモフ・ハウスドルフ距離に関する収束や崩壊現象について研究し、極限空間の境界特異点の分類と特徴付けを始めとする幾何学をほぼ決定した。(Zhilang Zhang氏との共同研究)。(2)曲率が上に有界で測地的に完備な2次元距離空間の位相特異点集合を始めとする局所構造を決定し、曲率が上に有界な多面体による近似定理やガウス・ボンネ定理を得た。(永野幸一氏と塩谷隆氏との共同研究)。(3)境界をもつ3次元アレクサンドロフ空間で崩壊するものの位相を決定した(三石史人氏との共同研究)。

研究成果の学術的意義や社会的意義

閉じたリーマン多様体の崩壊理論は、Perelmanによるポアンカレ予想・幾何化予想解決において重要な役割を果たした。一方で応用の観点からも境界付きリーマン多様体の崩壊の研究は重要であるが、Jeremy Wongの研究以後、我々の研究まで全く進展がなかった。我々の研究は新境地を開くものである。曲率が上に有界な空間は、幾何学的群論など関連分野は広い。しかしその局所構造は極めてワイルドなもので、これまで未解明であった。本研究により測地的に完備で曲率が上に有界な2次元距離空間の局所構造が世界で初めて解明された。これにより曲率の上界の根源的な本質を深く理解することが可能となった。

研究成果の概要(英文)：(1)We investigated the convergence and collapsing phenomena of Riemannian manifolds with boundary whose sectional curvatures are uniformly bounded below and the second fundamental forms of the boundaries are uniformly bounded. We characterized the boundary singular points of the limit spaces, and determined the geometry of the limit spaces. (2)We determined the local structure of geodesically complete two-dimensional metric spaces with curvature bounded above, based on the topological singular point set. We also obtained an approximation theorem by polyhedral surfaces and the Gauss-Bonnet theorem. (3) We determined the topology of three-dimensional Alexandrov spaces with boundary.

研究分野：微分幾何学

キーワード：崩壊理論 境界付きリーマン多様体 アレクサンドロフ空間 CAT(1)空間 境界特異点

1. 研究開始当初の背景

(I) 断面曲率が下に有界な境界つきリーマン多様体が内半径崩壊する場合の Zhilag Zhang 氏との共同研究による論文が投稿中であり、一般の場合の極限空間の構造については境界特異点の次元評価について検討中であった。(II) アレクサンドロフ空間の非崩壊の場合におけるリプシッツ・ホモトピーの理論構成について、三石史人氏との共同研究による論文が投稿中であった。2次元局所 CAT(1)空間については、アレクサンドロフの線織面に関する古典的な結果の不備を検討中であった。(III) スペクトル収束とスペクトル逆問題について、海外の共同研究者の一名が他界し、研究計画の再検討を迫られた。

2. 研究の目的

断面曲率やリッチ曲率が下に有界なリーマン多様体のグロモフ・ハウスドルフ収束・崩壊現象解明に向けて、崩壊多様体の構造論、極限空間の幾何解析、スペクトル収束・逆問題など総合的観点に立って、研究を新たなステージへと展開させて行く。本研究の主目的は次の通りである：

(I) 断面曲率やリッチ曲率が下に有界な枠組みで、リーマン多様体の収束・崩壊理論について、幾何解析や代数的トポロジーの新視点を取り入れて展開する。

(II) アレクサンドロフ空間、リッチ極限空間や2次元 CAT(1)-空間の幾何解析について、有限次元ユークリッド空間への双リプシッツ埋込み、極集合 (extremal subset) の幾何学などの新視点を交えながら展開する。

(III) スペクトル収束とスペクトル逆問題について、アレクサンドロフ空間やリッチ極限空間のスペクトル逆問題、および境界つきリーマン多様体のスペクトル収束を展開する。

3. 研究の方法

断面曲率が下に、境界の第2基本形式が一様に有界である境界つきリーマン多様体の収束や崩壊の研究については、Zhilang Zhang 氏 (Foshan) が2019年1月から3月にかけての3か月間、また2020年1月から2021年1月までの1年間京都大学に滞在し、これらを推進力としつつ共同研究を実施した。論文は既にほぼ出来上がっており、今後最終版を投稿予定である。

曲率が上に有界な2次元距離空間の研究については、研究代表者と永野氏との定期的な研究打合せを推進力としつつ塩谷氏も合流し3者の共同研究により研究を進めた。大域構造に関する Part II の論文完成は今後の急務である。

崩壊する境界をもつ3次元アレクサンドロフ空間の研究については、三石氏を京都大学に定期的に招聘し定期的な研究打合せを通じて研究を進めた。論文を既にほぼ出来上がっており、今後最終版を投稿予定である。

毎年2月頃に筑波大学で研究集会「リーマン幾何と幾何解析」を開催し、最新結果についての情報収集、成果発表や後進の育成に努めた。

4. 研究成果

(1) 断面曲率が下に、境界の第2基本形式が一様に有界であるような境界つきリーマン多様体の無限列のグロモフ・ハウスドルフ収束や崩壊について研究した (Z. Zhang 氏との共同研究)。前年度までに得られていた内半径崩壊する境界つきリーマン多様体の構造定理についての論文が Geometry and Topology から出版された。またそのような境界つきリーマン多様体の極限空間の幾何学をほぼ決定することができた。内半径崩壊する場合、極限空間はアレクサンドロフ空間になるが、一般の場合、極限空間は極めてワイルドであり、極限空間の境界と呼ぶべき、崩壊するリーマン多様体の境界の極限に当たる部分の幾何学の展開が研究の突破口を開く鍵となる。そのため、先ず、極限空間の境界点を単純点と2重点に分類し、さらに単純点集合と2重点集合の境界に現れる点を単純特異点、2重特異点に分類した。ただし、これら2種類の境界特異点以外にも、単純点集合の内点でカusp (尖点) と呼ぶべき特異点が現れる。本研究では、極限空間のこれらの境界特異点の分類と特徴付け、それぞれの境界特異点集合のハウスドルフ次元の精密評価を与えた。特に単純特異点がカusp でもあることの証明は一筋縄では行かず、極限空間の境界の局所連結性に関する長い議論を経る必要があった。また上記の境界付きリーマン多様体の収束の下で、リーマン多様体の体積の収束および境界の体積の収束を示すことができた。他にもいくつかの崩壊多様体に関する大域的な結果を得た。これらの研究結果の幾つかについては、北京大学や立命館大学で開催された研究集会で成果発表した。

(2) 曲率が上に有界な距離空間の研究は、幾何学的群論など関連分野は広い。しかしその局所構

造は、測地線の分岐に起因する極めてワイルドなもので、これまで局所構造の具体的な記述は得られていなかった。本研究で、測地的に完備で曲率が上に有界な2次元距離空間の局所構造を、世界で初めて記述することに成功した。これにより曲率の上界の根源的な本質を深く理解することが可能となった。具体的な研究成果は次の通りである：①このような2次元の局所CAT空間は、局所的には有限個のCAT-円盤やCAT-分岐円盤の貼り合わせとして表現される ②特異点集合はこれらのCAT-円盤たちの交わりから生じる局所有限なリプシッツ曲線である ③これらの特異リプシッツ曲線は局所有限なturn（測地的曲率に相当）をもつ ④逆にこれらにより2次元CAT(1)空間が特徴づけられる。大域構造に関しては、⑤そのような空間は、ホモトピー型が同じ多面体構造をもつ曲率が上に有界な2次元CAT空間により近似される ⑥そのような空間上でガウス・ボンネ定理を得た。これらの結果は、これまでの2次元多面体に関するBurago-Buyaloの結果を一般の場合に拡張し、更に彼らのプログラムを完全に解決するものである。（永野幸一氏と塩谷隆氏との共同研究）。

(3) 崩壊する境界をもつ3次元アレクサンドロフ空間の位相を決定した（三石史人氏との共同研究）。この過程で、1次元以下の空間に崩壊する境界つき3次元アレクサンドロフ空間は、実際には非負曲率をもつことが判明した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takao Yamaguchi, Zhilang Zhang	4. 巻 23
2. 論文標題 Inradius collapsed manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Geometry and Topology	6. 最初と最後の頁 2793 -- 2860
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/gt.2019.23.2793	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ayato Mitsuishi, Takao Yamaguchi	4. 巻 29
2. 論文標題 Lipschitz homotopy convergence of Alexandrov spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Geom. Anal	6. 最初と最後の頁 2217 -- 2241
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12220-018-0075-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ayato Mitsuishi, Takao Yamaguchi	4. 巻 71
2. 論文標題 Obtuse constants of Alexandrov spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 1081 -- 1103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/78917891	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ayato Mitsuishi, Takao Yamaguchi	4. 巻 372
2. 論文標題 Good covering of Alexandrov spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc	6. 最初と最後の頁 8107-8130
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/7849	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroki Nakajima, Takashi Shioya	4. 巻 349
2. 論文標題 Isoperimetric rigidity and distributions of 1-Lipschitz functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Adv. Math	6. 最初と最後の頁 1198 -- 1233
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2019.04.043	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shouhei Honda, Song Sun, Ruobing Zhang	4. 巻 62
2. 論文標題 A note on the collapsing geometry of hyperKahler four manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Sci. China Math.	6. 最初と最後の頁 2195 - 2210
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11425-019-1602-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Honda Shouhei	4. 巻 24
2. 論文標題 New differential operator and noncollapsed RCDspaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Geometry & Topology	6. 最初と最後の頁 2127 ~ 2148
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/gt.2020.24.2127	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Honda Shouhei	4. 巻 85
2. 論文標題 Rigidity for positive Ricci curvature via metric measure geometry	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 151--161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08510151	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Koji, Shioya Takashi	4. 巻 24
2. 論文標題 Graph manifolds as ends of negatively curved Riemannian manifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Geometry & Topology	6. 最初と最後の頁 2035 ~ 2074
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/gt.2020.24.2035	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計13件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Takao Yamaguchi
2. 発表標題 Convergence and collapsing of spaces with boundary
3. 学会等名 Curvature and Topology of Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takao Yamaguchi
2. 発表標題 Limit spaces of Riemannian manifolds with boundary
3. 学会等名 The 5th Japan-China Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Shioya
2. 発表標題 Graph manifolds as ends of negatively curved Riemannian manifolds
3. 学会等名 Curvature and Topology of Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shouhei Honda
2. 発表標題 Embedding of RCD(K, N) spaces in L^2 via eigenfunctions
3. 学会等名 Optimal transport and Geometric Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shouhei Honda
2. 発表標題 Non-collapsed/collapsed Gromov-Hausdorff limit spaces, synthetic treatment of Ricci curvature, and relation to complex geometry I, II
3. 学会等名 The 25th Symposium on Complex Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Yamaguchi
2. 発表標題 Collapsing Riemannian manifolds with boundary
3. 学会等名 The 6th German-Japan University Presidents Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Shioya
2. 発表標題 Isoperimetric rigidity and distributions of 1-Lipschitz functions
3. 学会等名 The 4th Japan-China Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Honda
2. 発表標題 Weyl's law on metric measure spaces with Ricci bounds from below
3. 学会等名 Geometric Analysis Seminar, Tsinghua University (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Honda
2. 発表標題 Geometric analysis on metric measure spaces with uniform Ricci bounds from below
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Honda
2. 発表標題 Ricci曲率が下に有界な特異空間上の幾何解析
3. 学会等名 018年度日本数学会幾何学賞受賞特別講演, 岡山大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Honda
2. 発表標題 Embedding of $RCD^*(K, N)$ spaces in L^2 via eigenfunctions
3. 学会等名 Optimal Transport and Applications, Scuola Normale Superiore (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shouhei Honda
2. 発表標題 A new sphere theorem via the eigenmap
3. 学会等名 Geometric Measure Theory and Geometric Analysis in Moscow (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takashi Shioya
2. 発表標題 Ellipsoids converge to Gaussian spaces
3. 学会等名 Geometric Measure Theory and Geometric Analysis in Moscow
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	本多 正平 (Shohei Honda) (60574738)	東北大学・理学研究科・教授 (11301)	
研究分担者	塩谷 隆 (Takashi Shioya) (90235507)	東北大学・理学研究科・教授 (11301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	Foshan University			