

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18H01123

研究課題名(和文) 分野横断的視点によるフラクタル及びその上の確率過程の解析・幾何

研究課題名(英文) Analysis and geometry of fractals and stochastic processes on them from field-transverse viewpoints

研究代表者

梶野 直孝 (KAJINO, Naotaka)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：90700352

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題における中心的な研究成果は、フラクタル上の熱拡散が普遍的に「拡散の速さと距離の変形によりウォーク次元(時空間変数のスケーリング関係を表す指数)を2にいくらかでも近くできる」という意味でガウス型に任意に近くできること、しかしガウス型にできる例は稀であること、およびウォーク次元とエネルギー測度(勾配ベクトルの長さの2乗の積分に相当する、関数の各集合上でのエネルギーを与える測度)の特異性の関係を明らかにしたことである。その他研究分担者により、フラクタル上の統計物理モデル、群上の調和解析、3次元のループ除去ランダムウォーク・一様全域木などのフラクタルが関係する種々の重要な対象への理解を深めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ウォーク次元とエネルギー測度の特異性の関係は当該分野における20数年来の未解決予想であり、これを肯定的に解決できたことは熱拡散が劣ガウス的である(ユークリッド空間における通常の熱拡散よりも真に遅い)こととエネルギー測度の間の最も基本的な関係を定理として確立した意義深い結果である。フラクタル上の熱拡散ではウォーク次元を2にいくらかでも近くできるが2にできるのは稀、という結果は、「フラクタルの幾何構造を、熱拡散の速さとの兼ね合いでどこまで滑らかなものに変形できるか」という自然な問いに答えるものであり、フラクタルにおける幾何と熱拡散の間の複雑な関係の一端を明らかにしたその意義は大きい。

研究成果の概要(英文)：As the main results of this research project, the principal investigator has proved the following. Heat diffusions on fractals can be universally uniformized to be arbitrarily close to being Gaussian, in the sense that the walk dimension (the exponent representing the scaling relation between time and space variables) can be made arbitrarily close to 2 by changes of the diffusion speed and the metric, but can be uniformized to be Gaussian only in very limited cases. It has also been revealed how the walk dimension of the diffusion is related to the singularity of the energy measures (measures representing the energy of functions on each set, which correspond to the integral of the square of the length of the gradient vector). Moreover, the co-investigators have advanced the understanding of various important objects related to fractals such as statistical physics models over fractals, harmonic analysis on groups, and the 3-dimensional loop-erased random walks and uniform spanning tree.

研究分野：フラクタル上の解析学・ポテンシャル論

キーワード：フラクタル上の解析学 劣ガウス型熱核評価 エネルギー測度 ウォーク次元 ランダム環境中のディレクティドポリマー 群上の調和解析 3次元ループ除去ランダムウォーク 3次元一様全域木

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

### 1. 研究開始当初の背景

(1)「フラクタル」とは「長さが無限大の曲線」のような、従前には病的な例外的事例とみなされていた滑らかなでない構造を有する図形に対する総称であり、B. B. Mandelbrot が著書「The Fractal Geometry of Nature」(Freeman, 1982)においてその自然界における重要性を指摘して以来、フラクタルは自然科学の諸分野で普遍的に見出され理論・応用両面から盛んに研究されている。数学解析・確率論の分野では、熱や波動といった代表的な物理現象を厳密に記述し解析することを目標として、フラクタル上のラプラシアンや対応する拡散過程の構成と解析が1980年代後半以来進められてきた。

(2)熱や波動の伝播を表す微分方程式である熱方程式や波動方程式においては、空間変数についての微分に Laplacian と呼ばれる微分作用素が自然に現れることがよく知られている。滑らかな曲面(や、その一般化である Riemann 多様体)においては Laplacian は具体的な偏微分作用素として与えられるが、フラクタルにおいては1点のどんなに小さな近傍も全空間と同程度の複雑さを有するため素朴な微分概念が機能せず、Laplacian をどう定義すべきかは非自明な問題である。1980年代後半～90年代前半にかけての著しい研究の進展により、典型的な自己相似フラクタルに対しては Laplacian を数学的に厳密に定義することができ、さらに熱核(熱方程式の初期値問題の解を与える作用素の積分核)が劣 Gauss 型評価と呼ばれる型の上下評価を満たすこと、特に熱方程式の解の挙動は滑らかな Riemann 多様体の場合と質的に異なることが明らかにされた。この方面の研究はその後 Riemann 多様体における熱核評価の専門家らをも巻き込みながら急速に発展し、その流れは研究開始当初にも続いていた。代表的な成果として例えば、劣 Gauss 型熱核評価が熱方程式の解に対する重要な不等式である放物型 Harnack 不等式と同値であること、劣 Gauss 型熱核評価が Laplacian の有界摂動に関し安定であること、より複雑な(その大部分は確率論・統計物理の文脈で自然に現れるランダムな)フラクタルにおける劣 Gauss 型熱核評価に準ずる型の熱核評価、楕円型(すなわち Laplace 方程式の解に対する)Harnack 不等式も Laplacian の有界摂動に関し安定であること、などが既に知られていた。

(3)熱核評価に直接関わる研究がこうして隆盛を誇っていた一方で、フラクタル上のラプラシアンおよび対応する拡散過程に関する熱核評価以外の観点からの研究は立ち遅れていた。例えば拡散過程の標本路の大域幾何構造(自己交叉の構造など)、領域上の調和測度(拡散過程の領域の境界への初到達位置の確率分布)、エネルギー測度(滑らかな Riemann 多様体における勾配ベクトルの長さの2乗の積分に相当する、関数の各集合上でのエネルギーを与える測度)などは拡散過程の特性量として基本的かつ重要であるが、精密な解析を行うには熱核評価の情報だけでは不十分で、その詳細な性質はほとんど明らかになっていなかった。そこでフラクタル上のラプラシアンに対する理解をより一層深めるためには、これらの課題をはじめとする「既存の研究の主流である熱核評価だけでは到底解決できない」研究課題に解決の筋道を立てることが不可欠であると思われた。

(4)また、Harnack 不等式をはじめとする調和関数の解析に関わるポテンシャル論的手法は取り入れられているものの、その他の点では確率論以外の分野との交流が希薄で、現状では一部の確率論の研究者だけが研究している特殊な分野という位置付けに甘んじていたこともフラクタル上の解析学が抱える大きな課題であった。数学だけに限定してもフラクタルはエルゴード理論・複素力学系・Klein 群論・双曲群論など多くの分野で自然に現れるにも拘らず、それらのフラクタルにおけるラプラシアンの研究はごく僅かしかなかった上、これらの分野の知見をフラクタル上の解析学に本質的な形で応用した研究も十分多くなされてきたとは言いがたかった。このような現状はフラクタルの現代数学における出現頻度や重要性に鑑みるに決して好ましいことではなく、状況の改善のためには他分野の研究者との研究交流の促進、およびそれを通じての幅広い視点からの既存の研究の見直しや新たな研究対象の開拓、などを速やかに試みるべき状況であった。

### 2. 研究の目的

(1)本研究は、フラクタル上の解析学が抱えていた上記の課題を解決に導くことにより、当該分野に関わる研究を分野横断的に発展させることを主な目的とするものである。主流である熱核評価の研究に留まらずにそれだけでは解決の望めない研究課題にも積極的に取り組む点、フラクタルとの関わりが深いにも関わらず従来の研究においては交流のあまり図られてこなかったエルゴード理論・複素力学系・Klein 群論・双曲群論などの諸分野との交流を志向する点などに、本研究の独自性が表れているといえる。

(2)具体的には、上述した拡散過程の標本路の大域幾何構造、領域上の調和測度、エネルギー測度などの拡散過程の特性量の詳細な幾何的性質の解明の他、フラクタル上の拡散過程を土台にした統計物理モデルなどについての理解を深めることを目的とする(が、これらに限らず新たな課題の発見と解決を絶えず志向する)。

### 3. 研究の方法

(1)調和測度やエネルギー測度は解析的な由来を持つ典型的な測度であるが、そのような測度に関しては、(Hausdorff 測度をはじめとする)幾何学的に自然な測度との間の特異性の証明や局所挙動の定量的記述などが解決すべき問題として挙げられる。同種の問題は測度のマルチフラクタル解析としてエルゴード理論・力学系において盛んに研究されており、そこでの手法の適用による調和測度の解析にも、研究分担者の田中による双曲群上のランダムウォークの場合の結果などの実例が既にある。フラクタル上の解析学においてもマルチフラクタル解析の手法を用いた研究自体は存在するものの、調和測度やエネルギー測度に対するものは皆無に近い。そこで分担者の田中と梶野との協力によりそのような研究の実現を目指す。また調和測度やエネルギー測度の特性には熱核評価の帰結として得られる諸性質も深く関係している可能性が高いため、熱核評価に関連する関数不等式の取り扱いに詳しい British Columbia 大学の Mathav Murugan 氏を招聘あるいは訪問し、意見交換や場合によっては共同研究を行う。

(2)拡散過程の標本路の大域幾何構造については、ユークリッド空間上の Brown 運動の場合においてすら現在でも活発な研究対象であり、研究分担者の白石がこの種の解析の専門家である。多くのフラクタル上の拡散過程は「任意の1点集合に確率1で到達する」という点再帰性と呼ばれる性質を有している点でユークリッド空間上の Brown 運動とは著しく異なるため、ユークリッド空間の場合の単なる一般化に留まらない多様な現象が見られるものと期待される。これについて分担者の白石が研究代表者の梶野と協力して詳細な解析を試みる。

(3)フラクタル上の拡散過程を土台にした統計物理モデルについては、高分子の生成過程を記述する統計物理モデルとして、整数格子上の単純ランダムウォークに基づいて構成されるディレクティドポリマーと呼ばれるモデルが確率論ではよく知られている。このモデルの性質は土台となるランダムウォークやそのスケール極限である拡散過程の標本路の大域的性質と密接に関わっており、空間1次元の場合には研究分担者の中島により、モデルの自由エネルギーの高温度極限が確率熱方程式の解の長時間挙動を通して記述できるという結果が得られている。フラクタル上で同様のモデルを考えた場合、拡散過程が点再帰的になる状況では類似の解析が行えることが期待されるものの、モデルの詳細な性質は基礎になるフラクタル上のランダムウォークや拡散過程および確率熱方程式の解の長時間挙動を強く反映した、フラクタルに特徴的なものとなることが予想される。これについて分担者の中島が梶野と協力して解決を試みる。

(4)その他、各研究分担者もフラクタルの対象が関係する新たな研究課題を独自の学術的興味に基づいて積極的に探索し研究する。各研究課題について、梶野と該当する研究分担者が、各分野の主要研究者との意見交換のため国内外の研究集会に積極的に参加したり海外の研究者を訪問・招聘したりするとともに、必要に応じて研究打合せのため国内出張を行うなど研究連絡を密に取ることで研究の進展を目指す。

(5)最後に、本研究ではその基本的立場である「分野横断的視点」の普及による、数学の一分野としてのフラクタル研究の全体的な発展をも志向していることを強調しておく。その実現のための第一歩として、2020年度中に特異空間の解析・幾何に関する国際研究集会を日本国内で開催し、フラクタルに関わる様々な分野の研究者を講演者として海外から多数招聘し研究交流の促進を図る。

#### 4. 研究成果

(1)本研究課題における梶野の中心的な研究成果は、自己相似フラクタル上の Laplacian に対するエネルギー測度が様々な点で幾何的に特異であることを明らかにした次の一連の研究である。

①まず 2020 年に出版された Mathav Murugan 氏との共同研究において、熱核に対する上下からの劣 Gauss 型評価の下ではエネルギー測度は自然な体積測度と互いに特異になる、という本研究分野の 20 数年来の予想を肯定的に解決した。また併せて、古典的な Gauss 型評価の仮定の下ではエネルギー測度は自然な体積測度と互いに絶対連続になることも証明した。エネルギー測度の特異性を導くに際しては熱核評価の型の Gauss 型からの乖離が一定以上に大きいことを仮定する必要があるが、Gauss 型からの乖離がどんなに弱くてもエネルギー測度は常に特異になるだろうと予想してはいるもののこの予想は未解決である。この予想の根拠を与える結果として、2022 年に出版された梶野の論文では、上下からの劣 Gauss 型熱核評価とエネルギー測度の特異性を満たすフラクタルとその上の Laplacian の具体例の族であって、その熱核評価の型が Gauss 型にいくらかでも近いものを含むようなものを構成した。

②上記①の結果に関連して、2023 年初頭に出版された梶野の論文において、熱核評価が劣 Gauss 型か Gauss 型かの区別の基準となる walk 次元と呼ばれるフラクタル上の Laplacian の特性量が、一般化 Sierpinski carpet と呼ばれる重要な自己相似フラクタルの族に対しては常に 2 より真に大きい、という基本的事実の初等的証明を与えた。この事実の、どの一般化 Sierpinski carpet に対しても通用する証明を与えた論文は従前には存在しなかったが、本論文の証明は初等的であるだけでなくどの一般化 Sierpinski carpet に対しても通用する。特に一般化 Sierpinski carpet 上の標準 Laplacian に対する熱核評価は劣 Gauss 型であり、従って日野(2005) (あるいは上記①)の結果によりこの場合エネルギー測度は標準的な体積測度と互いに特異であることも分かったことになる。

③さらに 2023 年初頭に出版された Mathav Murugan 氏との共同研究において次の結果を得た。

与えられた対称拡散過程に対し、空間内の場所毎に拡散の速さを変更するとともに空間の距離構造を元の距離と擬対称な（つまり、同心球の構造が元の距離との間で様に比較可能な）距離の範疇で変更することにより拡散過程の挙動を可能な限り Gauss 型に近付ける、という問題を考える。もう少し具体的には、ある変更の下で walk 次元  $D$  の放物型 Harnack 不等式が成立するようにできるような  $D$  全体の集合の下限を拡散過程の共形 walk 次元と定義し、この値を同定するという問題を考える。このとき、一般に共形 walk 次元は 2 か無限大かのどちらかであることを証明した。さらにこの値が 2 であるとき下限の値 2 はある変更により達成されるかという自然な問題については、典型的な自己相似フラクタル上の Laplacian ではこの値は既存の結果により無限大ではないため 2 であり、2 次元標準 Sierpinski gasket という最も基本的な例では下限の値 2 はある具体的な変更により達成されることが木上(2008)の結果により知られていた。これを受けて Murugan 氏との本共同研究では他の自己相似フラクタル上の具体例について考察し、Vicsek 集合および 3 以上の  $N$  に対する  $N$  次元標準 Sierpinski gasket では下限の値 2 は達成されないことを証明した。達成されないことの証明の鍵を握るのは調和関数のエネルギー測度の幾何的性質の解析であり、具体的には「線分上で一定値を取る調和関数」が一般の調和関数の局所挙動の主要部に自然に現れることを示すことに帰着する。

(2)フラクタル上の拡散過程を土台にした統計物理モデルについては、梶野および中島が小西航生氏と協力して、ランダム媒質中のディレクティドポリマーの自由エネルギーに関し共同研究を行い、強再帰的な劣 Gauss 型熱核評価を満たす一般の無限グラフに対し自由エネルギーの高温度での上下評価を 1 次元整数格子に対する既知の結果を拡張する形で証明した。またディレクティドポリマーの解析に関連して、同様の熱核評価を満たす無限グラフ上の 2 つの独立なランダムウォークの時刻  $n$  までの衝突回数  $T_n$  に関して梶野が牛瀧由規氏および小西航生氏と共同研究を行い、 $T_n$  の典型的な大きさを  $n$  の関数として特定するとともに  $T_n$  の値を典型的な大きさで規格化した確率変数の末尾確率の上下評価を与えた。

(3)その他、中島は乗法型確率熱方程式および KPZ 方程式と呼ばれる確率偏微分方程式の 3 次元以上の場合の研究を行い、 $L^2$ -領域と呼ばれるパラメータ領域において解の摂動を求め Edwards-Wilkinson 型の確率偏微分方程式が現れることを示した。さらに続く研究では 2 次元の場合に乗法型確率熱方程式の解から構成される関数の族の研究を行い、劣臨界領域と呼ばれるパラメータ領域において解の摂動を求めやはり Edwards-Wilkinson 型の確率偏微分方程式が現れることを示した。元々 3 次元以上の場合の研究では不等式評価を個別の計算により示していたが、2 次元の場合の研究では解析手法を改善することでまとめて評価できるようになった。

(4)田中はフラクタル幾何学とも深い関連を持つ Koebe-Andreev-Thurston によるサークルパッキング定理の離散調和写像類似について研究を行った。これは離散調和関数の研究の非線型問題版である。また双曲群の位相流を導入し整備することで擬相似剛性定理を証明し、さらに双曲群の古典的なクラスでそれ自体具体的な研究がかなりの程度可能である曲面群について研究を行いグラフの調和埋め込みについての一意化定理を証明した。

(5)白石は Omer Angel 氏 (British Columbia 大学), David A. Croydon 氏 (京都大学), Sarai Hernandez-Torres 氏 (UNAM) との共同研究において、3 次元一様全域木のスケール極限の存在およびその諸性質を証明するとともに、その応用として一様全域木の上のランダムウォークの研究も行った。また Xinyi Li 氏 (北京大学) との共同研究において、3 次元ループ除去ランダムウォークのスケール極限のヘルダー連続性に関する結果をループ除去ランダムウォークの成長指数を用いて与えた。

(6)2023 年 3 月にはフラクタルや特異距離空間の解析・幾何に関する国際研究集会を沖縄で開催し、フラクタルに関わる様々な分野の研究者を講演者として国内外から多数招聘し研究交流を行った。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件／うち国際共著 6件／うちオープンアクセス 5件）

|   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Naotaka Kajino  | 4. 巻<br>394           |
| 2. 論文標題<br>On singularity of energy measures for symmetric diffusions with full off-diagonal heat kernel estimates II: Some borderline examples | 5. 発行年<br>2022年       |
| 3. 雑誌名<br>Springer Proceedings in Mathematics & Statistics  | 6. 最初と最後の頁<br>223-251 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/978-981-19-4672-1_13   | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-             |
| 1. 著者名<br>Naotaka Kajino and Mathav Murugan   | 4. 巻<br>231           |
| 2. 論文標題<br>On the conformal walk dimension: quasisymmetric uniformization for symmetric diffusions  | 5. 発行年<br>2023年       |
| 3. 雑誌名<br>Inventiones mathematicae  | 6. 最初と最後の頁<br>263-405 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/s00222-022-01148-3   | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である）   | 国際共著<br>該当する          |
| 1. 著者名<br>Naotaka Kajino  | 4. 巻<br>55            |
| 2. 論文標題<br>An elementary proof that walk dimension is greater than two for Brownian motion on Sierpinski carpets                                | 5. 発行年<br>2023年       |
| 3. 雑誌名<br>Bulletin of the London Mathematical Society   | 6. 最初と最後の頁<br>508-521 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1112/blms.12742   | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-             |
| 1. 著者名<br>Shuta Nakajima and Makoto Nakashima   | 4. 巻<br>28            |
| 2. 論文標題<br>Fluctuations of two-dimensional stochastic heat equation and KPZ equation in subcritical regime for general initial conditions       | 5. 発行年<br>2023年       |
| 3. 雑誌名<br>Electronic Journal of Probability   | 6. 最初と最後の頁<br>1-38    |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1214/22-EJP885  | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である）   | 国際共著<br>-             |

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Ryokichi Tanaka                          | 4. 巻<br>41              |
| 2. 論文標題<br>Topological flows for hyperbolic groups | 5. 発行年<br>2021年         |
| 3. 雑誌名<br>Ergodic Theory and Dynamical Systems     | 6. 最初と最後の頁<br>3474-3520 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1017/etds.2020.101  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難             | 国際共著<br>-               |

|   |                         |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Toru Kajigaya and Ryokichi Tanaka                 | 4. 巻<br>4               |
| 2. 論文標題<br>Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps | 5. 発行年<br>2021年         |
| 3. 雑誌名<br>Annales Henri Lebesgue                            | 6. 最初と最後の頁<br>1767-1807 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.5802/ahl.116                 | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている (また、その予定である)                      | 国際共著<br>-               |

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Jeremie Briussel, Ryokichi Tanaka and Tianyi Zheng | 4. 巻<br>15            |
| 2. 論文標題<br>Random walks on the discrete affine group         | 5. 発行年<br>2021年       |
| 3. 雑誌名<br>Groups, Geometry, and Dynamics                     | 6. 最初と最後の頁<br>935-963 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.4171/GGD/616                  | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている (また、その予定である)                       | 国際共著<br>該当する          |

|   |                    |
|---|--------------------|
| 1. 著者名<br>Xinyi Li and Daisuke Shiraishi  | 4. 巻<br>27         |
| 2. 論文標題<br>The Holder continuity of the scaling limit of three-dimensional loop-erase loop-erased random walk | 5. 発行年<br>2022年    |
| 3. 雑誌名<br>Electronic Journal of Probability   | 6. 最初と最後の頁<br>1-37 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1214/22-EJP869   | 査読の有無<br>有         |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている (また、その予定である)  | 国際共著<br>該当する       |

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Naotaka Kajino and Mathav Murugan  | 4. 巻<br>48              |
| 2. 論文標題<br>On singularity of energy measures for symmetric diffusions with full off-diagonal heat kernel estimates | 5. 発行年<br>2020年         |
| 3. 雑誌名<br>The Annals of Probability  | 6. 最初と最後の頁<br>2920-2951 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1214/20-AOP1440   | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>該当する            |

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Clement Cosco, Shuta Nakajima and Makoto Nakashima   | 4. 巻<br>151           |
| 2. 論文標題<br>Law of large numbers and fluctuations in the sub-critical and $L^2$ -regions for SHE and KPZ equation in dimension $d \geq 3$ | 5. 発行年<br>2022年       |
| 3. 雑誌名<br>Stochastic Processes and their Applications  | 6. 最初と最後の頁<br>127-173 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1016/j.spa.2022.05.010  | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>該当する          |

|   |                         |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Omer Angel, David A. Croydon, Sarai Hernandez-Torres and Daisuke Shiraishi                | 4. 巻<br>49              |
| 2. 論文標題<br>Scaling limits of the three-dimensional uniform spanning tree and associated random walk | 5. 発行年<br>2021年         |
| 3. 雑誌名<br>The Annals of Probability   | 6. 最初と最後の頁<br>3032-3105 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1214/21-AOP1523  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>該当する            |

〔学会発表〕 計32件 (うち招待講演 21件 / うち国際学会 20件)

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>梶野 直孝                             |
| 2. 発表標題<br>ランダムウォークの衝突回数 of the 末尾確率に対する上下評価 |
| 3. 学会等名<br>無限粒子系、確率場の諸問題XVI                  |
| 4. 発表年<br>2021年                              |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Naotaka Kajino   |
| 2. 発表標題<br>Conformal walk dimension: its universal value and the non-attainment for the Sierpinski carpet |
| 3. 学会等名<br>Pacific Workshop on Probability and Statistical Physics (招待講演) (国際学会)                          |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>梶野 直孝  |
| 2. 発表標題<br>On the conformal walk dimension II: Non-attainment for some Sierpinski carpets |
| 3. 学会等名<br>2021年度確率論シンポジウム  |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Naotaka Kajino  |
| 2. 発表標題<br>Sub-Gaussian heat kernel bounds and singularity of energy measures for symmetric diffusions |
| 3. 学会等名<br>OIST Analysis on Metric Spaces Seminar (招待講演)   |
| 4. 発表年<br>2022年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Naotaka Kajino  |
| 2. 発表標題<br>On singularity of energy measures for symmetric diffusions with full off-diagonal heat kernel estimates |
| 3. 学会等名<br>7th Cornell Conference on Analysis, Probability, and Mathematical Physics on Fractals (招待講演) (国際学会)     |
| 4. 発表年<br>2022年  |



|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Naotaka Kajino  |
| 2. 発表標題<br>Quasisymmetric Gaussian uniformization is impossible for Brownian motion on the Sierpinski carpet |
| 3. 学会等名<br>International Workshop on Dirichlet Forms and Related Topics (招待講演) (国際学会)                        |
| 4. 発表年<br>2022年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>梶野 直孝  |
| 2. 発表標題<br>On singularity of energy measures for symmetric diffusions with full off-diagonal heat kernel estimates II: Some borderline examples |
| 3. 学会等名<br>2022年度日本数学会秋季総合分科会・統計数学分科会   |
| 4. 発表年<br>2022年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Naotaka Kajino  |
| 2. 発表標題<br>Quasisymmetric Gaussian uniformization is impossible for Brownian motion on the Sierpiński carpet |
| 3. 学会等名<br>Open Japanese-German conference on stochastic analysis and applications (招待講演) (国際学会)             |
| 4. 発表年<br>2022年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Naotaka Kajino  |
| 2. 発表標題<br>Quasisymmetric Gaussian uniformization is impossible for Brownian motion on the Sierpinski carpet |
| 3. 学会等名<br>Heat Kernels, Stochastic Processes and Functional Inequalities (国際学会)                             |
| 4. 発表年<br>2022年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Naotaka Kajino   |
| 2. 発表標題<br>Conformal walk dimension: its universal value and the non-attainment for the Sierpinski carpet             |
| 3. 学会等名<br>Smooth Functions on Rough Spaces and Fractals with Connections to Curvature Functional Inequalities (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2022年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>中島 誠   |
| 2. 発表標題<br>Fluctuation in $L^2$ -region for stochastic heat equation and KPZ equation in higher dimension |
| 3. 学会等名<br>関西確率論セミナー (招待講演)   |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Makoto Nakashima   |
| 2. 発表標題<br>Gaussian fluctuations of stochastic heat equation and KPZ equation in higher dimension in subcritical regime |
| 3. 学会等名<br>Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics (招待講演) (国際学会)  |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>中島 誠   |
| 2. 発表標題<br>高次元確率熱方程式とKPZ方程式の $L^2$ -領域における解の摂動  |
| 3. 学会等名<br>The 19th Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Makoto Nakashima  |
| 2. 発表標題<br>Gaussian fluctuations of stochastic heat equation and KPZ equation in higher dimension in $L^2$ regime          |
| 3. 学会等名<br>Workshop on Probabilistic Methods in Statistical Mechanics of Random Media and Random Fields 2022 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2022年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Ryokichi Tanaka                                   |
| 2. 発表標題<br>The Manhattan curve and rough similarity rigidity |
| 3. 学会等名<br>Pacific Dynamics Seminar (招待講演) (国際学会)            |
| 4. 発表年<br>2021年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Ryokichi Tanaka   |
| 2. 発表標題<br>The Manhattan curve and rough similarity rigidity           |
| 3. 学会等名<br>Ohio State University, Ergodic Theory Seminar (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2021年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>田中 亮吉  |
| 2. 発表標題<br>Glauber-Exclusion dynamics: rapid mixing regime                                  |
| 3. 学会等名<br>The 19th Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Daisuke Shiraishi   |
| 2. 発表標題<br>Convergence of three-dimensional loop-erased random walk in the natural parameterization    |
| 3. 学会等名<br>The 10th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2021年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Naotaka Kajino  |
| 2. 発表標題<br>Sub-Gaussian heat kernel bounds imply singularity of energy measures        |
| 3. 学会等名<br>International Conference: ``Bernoulli-IMS One World Symposium 2020'' (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>梶野 直孝  |
| 2. 発表標題<br>A bridge between elliptic and parabolic Harnack inequalities |
| 3. 学会等名<br>RIMS共同研究(公開型)「2020年度確率論シンポジウム」                               |
| 4. 発表年<br>2020年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>梶野 直孝  |
| 2. 発表標題<br>An elementary proof of walk dimension being greater than two for Brownian motion on Sierpinski carpets |
| 3. 学会等名<br>2021年度日本数学会年会・統計数学分科会  |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>中島 誠                              |
| 2. 発表標題<br>高次元確率熱方程式とKPZ方程式の $L^2$ -領域における摂動 |
| 3. 学会等名<br>RIMS共同研究(公開型)「2020年度確率論シンポジウム」    |
| 4. 発表年<br>2020年                              |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Ryokichi Tanaka                                  |
| 2. 発表標題<br>Topological flows for hyperbolic groups          |
| 3. 学会等名<br>Geometric Group Theory in East Asia (招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年<br>2020年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Daisuke Shiraishi  |
| 2. 発表標題<br>Uniform spanning tree in three dimensions                          |
| 3. 学会等名<br>Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics III (招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年<br>2021年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Naotaka Kajino   |
| 2. 発表標題<br>Sub-Gaussian heat kernel bounds imply singularity of energy measures     |
| 3. 学会等名<br>Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019 (招待講演)(国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Naotaka Kajino  |
| 2. 発表標題<br>Sub-Gaussian heat kernel bounds imply singularity of energy measures                  |
| 3. 学会等名<br>International Conference on Analysis and PDEs on Manifolds and Fractals (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Daisuke Shiraishi   |
| 2. 発表標題<br>Scaling limit of uniform spanning tree in three dimensions  |
| 3. 学会等名<br>Heat Kernels, Stochastic Processes and Functional Inequalities, Workshop at Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Daisuke Shiraishi  |
| 2. 発表標題<br>Scaling limit of uniform spanning tree in three dimensions |
| 3. 学会等名<br>Probability seminar at Peking University (招待講演) (国際学会)     |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>梶野 直孝  |
| 2. 発表標題<br>Sub-Gaussian heat kernel bounds imply singularity of energy measures |
| 3. 学会等名<br>2019年度確率論シンポジウム  |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>梶野 直孝   |
| 2. 発表標題<br>Tail probability estimates for the collision number of recurrent random walks with on-diagonal heat kernel upper bounds |
| 3. 学会等名<br>研究集会「無限粒子系、確率場の諸問題XV」   |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Daisuke Shiraishi  |
| 2. 発表標題<br>Geometry of Brownian motion  |
| 3. 学会等名<br>2nd Hong Kong/Kyoto Workshop on ``Fractal Geometry and Related Areas'' (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Ryokichi Tanaka  |
| 2. 発表標題<br>Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces  |
| 3. 学会等名<br>Conference in Geometric Group Theory, Beijing International Center for Mathematical Research (BICMR), Beijing, China (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年   |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

|   |
|---|
| <p>Publications and preprints<br/> <a href="https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nkajino/publications.html">https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nkajino/publications.html</a><br/>           梶野 直孝   京都大学数理解析研究所<br/> <a href="https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/list/kajino.html">https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/list/kajino.html</a><br/>           Makoto Nakashima's web site<br/> <a href="https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~nakamako/">https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~nakamako/</a><br/>           Ryokichi Tanaka<br/> <a href="https://ryokichitanaka.github.io">https://ryokichitanaka.github.io</a><br/>           白石 大典 (情報学研究科 情報学専攻応用解析学講座)   京都大学 教育研究活動データベース<br/> <a href="https://kdb.iimc.kyoto-u.ac.jp/profile/ja.f6a26c885ba820ce.html">https://kdb.iimc.kyoto-u.ac.jp/profile/ja.f6a26c885ba820ce.html</a><br/>           下記「7. 科研費を使用して開催した国際研究集会」の項目に記載した国際研究集会「Analysis and geometry of fractals and metric spaces: Recent developments and future prospects」の実際の開催時期は2023年3月である（電子申請システムが2023年以降を入力として受け付けなかったため止むを得ず2022年と記載した）。</p> |
|---|

## 6. 研究組織

|       | 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号)                  | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号)              | 備考 |
|-------|--|------------------------------------|----|
| 研究分担者 | 中島 誠<br>(NAKASHIMA Makoto)<br>(60635902)   | 名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授<br><br>(13901) |    |
| 研究分担者 | 田中 亮吉<br>(TANAKA Ryokichi)<br>(80629759)   | 京都大学・理学研究科・准教授<br><br>(14301)      |    |
| 研究分担者 | 白石 大典<br>(SHIRAISHI Daisuke)<br>(00647323) | 京都大学・情報学研究科・准教授<br><br>(14301)     |    |

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

|   |                    |
|---|--------------------|
| 国際研究集会<br>Analysis and geometry of fractals and metric spaces: Recent developments and future prospects | 開催年<br>2022年～2022年 |
| 国際研究集会<br>Kobe Workshop on Probabilistic Potential Theory and Related Fields                            | 開催年<br>2019年～2019年 |
| 国際研究集会<br>RIMS共同研究(公開型)「ガウス自由場および関連する話題」(Gaussian Free Fields and Related Topics)                       | 開催年<br>2018年～2018年 |

## 8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関                             |  |  |
|---------|-------------------------------------|--|--|
| カナダ     | University of British Columbia      |  |  |
| フランス    | Universite de Montpellier           |  |  |
| 米国      | University of California, San Diego |  |  |
| 米国      | University of Chicago               |  |  |
| 中国      | Peking University                   |  |  |
| イスラエル   | Weizmann Institute of Science       |  |  |