様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月 ２４ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2018～2021
課題番号：１８Ｈ０１１２７

研究課題名（和文）離散準可積分系の研究

研究課題名（英文）Studies on discrete quasi-integrable systems

研究代表者
時弘　哲治（Tokihiro, Tetsuji）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：１０１６３９６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　13,100,000円

研究成果の概要（和文）：離散KdV方程式の準可積分拡張として得られた拡張離散KdV方程式がHietarinta-Viallet方程式の2次元拡張であること，その簡約化がHietarinta-Viallet方程式とその一般化された系を含む事によって示し，さらにクラスター代数との関係，特異点閉じ込め性の代数的定式化であるcoprimeness性等を証明した．さらに任意の次元において同じ性質をもつ，準可積分離散方程式系を構成した．応用として，ルール184セルオートマトンをFuzzy化して得られる交通流モデルについて，基本図を構成しと定常解のすべてを求め安定性を証明し，slow-to-startモデルへの拡張した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
非線形可積分系は，一般には解くことのできない非線形な系の中で，厳密解を構成できる方程式系であり，方程式の持つ美しい代数構造や解が「見える」ことにより，純粋数学から工学まで広い分野にわたって応用されている．特に離散可積分系は，連続系を極限として含み，その応用範囲も広い．一方で，非線形系の中では特殊な系であり，ほとんどの系には可積分性はない．本研究成果は，特異点閉じ込め性という可積分性判定条件を代数的に再定式化することによって離散可積分系を一般化し，その枠を超えた新たな性質の良い離散系を構成したものであり，学術上も応用上もその意義は大きく，他分野へも影響を与えうるものと考えられる．

研究成果の概要（英文）：We extended the discrete KdV equation so that it has the co-primeness property, which is considred as a quasi-integrable extension of the discrete KdV equation. Then, it was proved that the discrete equation is a two-dimensional extension of the Hietarinta-Viallet equation, and its reduction involves the Hietarinta-Viallet equation and its generalized eequations of higher orders. We also proved the relation between cluster algebras and co-primeness, which is an algebraic formulation of the singularity confinement. Furthermore, we succeeded to construct the quasi-integrable system of discrete equations with the same properties in arbitrary dimensions.
As an application, we proved the stability of the traffic flow model obtained by Fuzzification of the Rule 184 cell automaton (FCA184). The generalization of FCA184 incorporates the slow-to-start property and analytically determines the value of the density of the phase transition from the free-flow phase to the congested phase.

研究分野：応用数学

キーワード：離散準可積分系　co-primeness　離散力学系　超離散系　Hietarinta-Viallet方程式　ファジーセルオートマトン

１．研究開始当初の背景

微分方程式系が可積分であるとは，通常，可解であり，すなわち解の存在が保証され，少なくとも原理的に解を構成する手続きが存在することと理解されている．特に，Hamilton 力学系においては，条件「互いに包合的（Poisson 括弧に関して可換であること）で位相変数の関数として独立な保存量が自由度の半数存在する」が満たされれば，求積によって解を求めることができ，この条件は Liouville 可積分性と呼ばれている．Lioville 可積分性は，非線形偏微分方程式系へも拡張され，無限次元非線形可積分偏微分方程式系（ソリトン方程式系）は，解を構成するために十分な無限個の独立な保存量を持つ無限自由度の Hamilton 力学系と捉えられる．ソリトン方程式系では，Liouville 可積分性と同等な条件として線形方程式系に帰着する Lax 対の存在があり，逆散乱法を用いて初期値問題を解くことが可能である．

一方，非線形常微分方程式系では，初期値に依存する特異点は極のみであるという特異点に注目した良い性質を Painlevé 性と呼び，Painlevé 性を持つ方程式（Painlevé 方程式，Garnier 程式など）も ’integrable’ （可積分）であるということが多い．しかしながら，Painlevé 方程式は求積によって解を構成できず，また，Hamilton 力学系として定式化可能であるが，非自励系であるため保存量は持たず，上の意味での可積分系ではない．その一方で，ソリトン方程式から相似簡約によって得られる常微分方程式は，全て Painlevé 性を持つと予想されており（Ablowitz-Ramani-Segure 予想)，可積分系と深く関わっている．ただし，ソリトン方程式系から相似簡約で得られる系は P1 や P2 のように自由パラメータの少ない Painlevé 方程式であり，P_6 などを得るには自己双対 Yang-Mills 方程式からの簡約などを考える必要がある．自然な問いとして，簡約によって Painlevé 性を持つ常微分方程式系に帰着する非線形偏微分方程式のうち，上記の意味で可積分ではないものが存在するのか，存在するならどのように数学的に特徴付けられ分類されるか，が生まれる．この問いに直接答えるには，Painlevé 性を何らかの形で偏微分方程式に拡張しなければならず，また現在のところ適当な手がかりがなく，かなり困難な問題であると考えられる．しかしながら，以下に述べるように，離散系の場合，2 階の有理写像には，Painlevé 性に対応する性質を持ちかつ自励的でありながら可積分ではない例がいくつか知られている．また，こうした例では，クラスター代数などに特徴的な Laurent 性（時間発展の結果が初期値の Laurent 多項式となる性質）が表れることもわかっている．本研究の一つの動機は，離散系からのアプローチでこの問いに答えたいというものであった．

2 階の有理写像には‘可積分’判定条件として，二つの条件が知られていた．ひとつは，特異点閉じ込めであり，もうひとつはゼロ代数的エントロピーである．特異点閉じ込めは，離散 Painlevé 方程式を得る際の作業仮説となった性質であり，Painlevé 性の離散類似と考えられている．おおざっぱに言うと，特異点閉じ込めは，有理写像の不定点が 1 点に閉じ込められる（不定点でのブローアップによって初期値空間を構成すれば双有理同型となり解消できる）ことであり，ゼロ代数的エントロピーは，写像による初期値の有理式としての増大度が多項式オーダーであることである．代数幾何学的な構造が明確な QRT 写像や離散 Painlevé 方程式は，どちらの性質も満たす．しかしながら，この二つの条件は等価ではなく，Hietarinta-Viallet 方程式（HV eq.）のように特異点閉じ込めは成立するが，代数的エントロピーは正のものがあり，逆に線形化可能写像と呼ばれる系では代数的エントロピーはゼロだが，特異点は閉じ込められていない．離散力学系では，可積分性の定義はまだ明確に定まってはいないが，2 階の有理写像の場合，ゼロ代数的エントロピーを満たす系を可積分系と定義することが一般的である．実際，HV eq. の軌道はカオス的であることが知られており，通常の可積分系の概念とは異なるふるまいをする．

このような背景から，可積分系の枠組みを越えたより広い研究対象を見い出すには，HV eq. のように，特異点閉じ込めに類する性質を持つが保存量が十分存在しないなど可積分系とは捉えられない系を高次元に拡張することが重要であり，特異点閉じ込めを何らかの意味で再定式化する必要があり拡張しする必要があった．

２．研究の目的

数学・数理科学においては，‘例外’の研究が新しい発展につながることがしばしば見られる．非線形偏微分方程式におけるソリトン方程式，統計力学における可解模型，有限単純群におけるモンスター群などは，その分野で例外的な対象（KdV 方程式，2 次元 Ising 模型，Mathieu 群）を研究することによって数学的に深化してきた．離散可積分系分野では，特異点を閉じ込めながらカオス的性質を示す HV eq.がまさに例外であり，HV eq.の高次元化及び一般化は新たな系の発展につながるのではないかと着想した．

そこで，１．に述べた背景に鑑みて，本研究の目的は，特異点閉じ込めの概念を高次元の離散力学系（偏差分方程式系）に適当できるように拡張し，HV eq. のように，特異点閉じ込めに類する性質を持つが保存量が十分存在しないなど可積分系とは捉えられない系の数学的な性質を研究することである．そのための具体的な目標は以下のものである．

① 特異点閉じ込めの代数的な定式化「co-primeness 条件」を行い，その有効性の検証と改良，
② co-primeness 条件を満たす離散力学系（離散準可積分系と呼ぶ）の導出とその分類，数理構造の解明，
③ 離散準可積分系の簡約，特殊解の構成，線形化可能写像の高次元化
④ 離散準可積分系に対応するセルオートマトン系の導出，ファジーセルオートマトンの構成と現象への応用

３．研究の方法

「２．研究の目的」にあげた具体的な目標について以下のようなアプローチを行った．

① 特異点閉じ込めを検証するには，不定となるすべての点とパターンをチェックしなければならないが，高階の離散力学系，まして，高次元の格子力学系では，こうしたパターンが非常に多く（格子系では無限に）存在し，全てを調べることは実際上不可能である．そこで，特異点閉じ込めの代数的な対応物でとして co-primeness 条件を提案した．Co-prmeness 条件とは，時間発展する従属変数を初期値の有理関数と見たとき，ある一定時間離れていればその関数どうしが互いに素となる性質である．例えば，2 階の有理写像（QRT 写像の一例）:$x_{n+1}=(x_n+1)(x_n^2x_{n-1})$において各$x_n$は初期値$x_0$，$x_1$の有理関数と考えられ，$x_{n+1}=\frac{p(x_0,x_1)}{q(x_0,x_1)}$と 互いに素な多項式$p(x_0,x_1)$，$q(x_0,x_1)$を用いて表すことができる．このとき，命題「$|n-m|\geq 4$ ならば，p_m,p_n,q_m,q_nは環$\mathbb{Z}[x_0^{\pm},x_1^{\pm}]$において互いに素である」が成り立つ．このように，「初期値の Laurent 多項式として互いに素であること」を co-primeness 条件と定義する．この写像は，co-primeness 条件を満たす．互いに素であれば共通の特異点を持たないから，特異点閉じ込めとの関係は直感的には明らかであり， 高次元系にも自然に拡張できる．検証のために，典型的な可積分系が co-primeness 条件を満たしていることを確認した．
② Co-primeness 条件を用いて，KdV 方程式や戸田浩志方程式などを非可積分に（準可積分に）拡張した．構成手法としては，最小特異パターンが閉じ込められるよう可積分格子系をべき変形する方法が有効であった．また，特異パターンから，可積分系と同様なτ関数表示へ移ると，双線形方程式を一般化した多項式形式が得られるため，τ関数による表示およびより一般的な co-primeness 条件（初期値だけではなく，初期値とその初期値のシフトによる Laurent 性をもつこと）を考察した．
③ 離散準可積分系を，可積分系で用いられている簡約手法，すなわちτ関数に対する拘束条件によって高次元から低次元への簡約を行った．簡約は Laurent 性を保存するため，Laurent 性を持つ一連の高階の有理写像を得ることができ，これらの有理写像の代数的エントロピーを求めた．また， Laurent 性の拡張（有限個の点での Laurent 多項式として表現できること）を行った．線形化可能系である Heideman-Hogan の高次元化を考察した．
④ 離散準可積分系に対して，準可積分な系の超離散化の手法を用いた．その結果，いくつかのセルオートマトン系（超離散準可積分系）を構成した．それらの系のファジー化を考え，具体的な現象として交通流問題への適用を行った．

４．研究成果

（1） 任意の次元の格子上で定義される準可積分離散方程式を構成した．この方程式は，離散 KdV 方程式を準可積分化した co-primeness 保存離散 KdV 方程式を拡張したものと考えることができる．この方程式は，指数関数的な次数増加をする，すなわち代数的エントロピーがせいであるにもかかわらず，特異点閉じ込めの性質を持つことで有名な Hietarinta-Viallet 方程式の高次元類似物としても解釈できるた．主定理として，この方程式の「タウ関数」形式における Laurent 性と既約性の証明を行った．この定理により，この方程式が co-primeness 条件を満たすことを導き，co-primeness 性の特徴を証明した．
（2） 方程式が多項式のいくつかの因子に分解可能な状況において，1 次元および 2 次元離散方程式の co-rimeness 特性を調べた．簡単な方程式について例示した後，Somos-4 方程式と（1 次元）離散 Toda 方程式の高次元の拡張に焦点を当てた．われわれのこれまでの結果では，方程式の時間発展記述部分が因数分解可能でないという条件の下で，すべての方程式が既約性および co-primeness 性を満たすことが証明されていたが，さらに，因数分解可能であっても，これらの方程式のすべてについて，既約性は満たされなくなるものの，co-primness 特性が依然として成立することを証明した．
（3） Hietarinta-Viallet 方程式の離散 KdV 方程式への co-primeness 保存拡張を行い，その方程式に対して簡約化することによって，高次の多項式によって記述される漸化式に拡張された準可積分系の族が得られた．これらの漸化式は，指数関数的な次数増加の観点からは非可積分的であるが，既約性および co-primeness 特性を満たす．これらの漸化式の代数的エントロピーを，次数増加を具体的に計算することによって導出した．この結果は，元の Hietarinta-Viallet 方程式の代数的エントロピーの値を再現する結果になっている．
（4） 長距離な相関を特異積分で表現する交通流システムが可積分系であることを利用して，対応する離散可積分系を考察した．完全な対応関係を持つ系を得るには至らなかったが，その過程

でファジーセルオートマトンを用いた系においても準可積分性を生じることがわかった．そのため，ルール 184ECA をファジー化することによって得られる交通流モデルについて詳細に解析した．この系は典型的な交通流モデルである ECA184 とバーガーズ方程式を一般化したものである．このファジーセルオートマトン（FCA184）に対して，すべての定常状態を厳密に求め，その密度と流量の関係を示す基本図（fundamental diagram）を解析的に求めた．また，例えば高速道路の入り口あるいは出口付近で生じる渋滞状況，いわゆるボトルネック効果についても定性的に正しい結果を与え，定常状態となる条件を定めた．さらに，FCA184 の超離散系を考察し，すべての状態が有限の時間ステップ内に進行波解に収束することなどを証明した．

また，FCA184 の一般化では slow-to-start 性を取り入れて，自由走行相から渋滞相へ移る密度に関して，解析的にその値を求め，slow-to-start CA の密度 1/3 以下での自由走行相の安定性を厳密に証明した．

(5) 円分多項式に付随する 1 次元非線形漸化式について，準可積分であるものを求める研究を行った．具体的には，円分多項式が代数的エントロピーの特性多項式となる漸化式において，その任意の項を定数だけシフトした漸化式を考察し，それらが co-primeness 条件を満足するかを網羅的に調べた．各々の系に対応する超離散系を考え，数値的に代数的エントロピーを見積もった．その結果，系は 3 つに分類される．周期系，代数的エントロピーがゼロの系，正の代数的エントロピーを持つ系に分類できたが，超離散系において数値的には準可積分的であっても元の系が準可積分的でないものなど例外が多く，完全な分類は困難であることが分かった．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Ryo Kamiya, Masataka Kanki, Takafumi Mase, and Tetsuji Tokihiro,	４．巻 B78
２．論文標題 Algebraic entropy of a multi-term recurrence of the Hietarinta-Viallet type	５．発行年 2020年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 121--153
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Higashi Kohei、Satsuma Junkichi、Tokihiro Tetsuji	４．巻 38
２．論文標題 Rule 184 fuzzy cellular automaton as a mathematical model for traffic flow	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	６．最初と最後の頁 579～609
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-021-00461-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Takubo Naoko、Yura Fumitaka、Naemura Kazuaki、Yoshida Ryo、Tokunaga Terumasa、Tokihiro Tetsuji、Kurihara Hiroki	４．巻 9
２．論文標題 Cohesive and anisotropic vascular endothelial cell motility driving angiogenic morphogenesis	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Scientific Reports	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1038/s41598-019-45666-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kamiya Ryo、Kanki Masataka、Mase Takafumi、Tokihiro Tetsuji	４．巻 51
２．論文標題 A two-dimensional lattice equation as an extension of the Heideman?Hogan recurrence	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	６．最初と最後の頁 125203～125203
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/aaad47	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kanki Masataka、Kansai University, Japan、Mase Takafumi、Tokihiro Tetsuji、University of Tokyo, Japan、University of Tokyo, Japan	4．巻 14
2．論文標題 On the Coprimeness Property of Discrete Systems without the Irreducibility Condition	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6．最初と最後の頁 065 (17pages)
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3842/SIGMA.2018.065	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Kamiya R.、Kanki M.、Mase T.、Tokihiro T.	4．巻 62
2．論文標題 Coprimeness-preserving discrete KdV type equation on an arbitrary dimensional lattice	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6．最初と最後の頁 102701～102701
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/5.0034581	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 Tetsuji Tokihiro
2．発表標題 Mathematical model for the dynamics of endothelial cells in angiogenesis
3．学会等名 The 38th JSST Annual International Conference on Simulation Technology（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	神谷　亮 (Kamiya Ryo)		

６．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	神吉　雅崇 (Kanki Masataka)		
研究協力者	間瀬　崇史 (Mase Takafumi)		

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関