

令和 4 年 6 月 17 日現在

機関番号：14503

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K02527

研究課題名(和文)理論枠組みに基づいた数学と数学教育学の融合による授業開発と教師教育

研究課題名(英文)Class Development and Teacher Education by uniting Mathematics and Mathematics Education based on Theoretical Frameworks

研究代表者

濱中 裕明(Hamanaka, Hiroaki)

兵庫教育大学・連合学校教育学研究科・教授

研究者番号：20294267

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では数学と数学教育学を融合させた研究手法を、いくつかの理論枠組みを用いて具体化していくことを目的としてきた。APOS理論をベースとして数学者と数学教育学者が協働して教材研究を行うという取り組みから開始して、少しずつ実践研究へと移行し、最終年度には、教職大学院の大学院生を巻き込み、いくつかの成果を教育実践研究としてまとめることまでが出来た。その際には、教授人間学理論やAPOS理論、証明の機能論などの理論を援用しつつ、数学者としての知見を数学教育学の枠組みで活用して授業開発に至るといふ数学専門と数学教育学とを架橋した研究手法を軌道に乗せることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では数学と数学教育学を融合させた研究手法を、いくつかの理論枠組みを用いて具体化していくことを目的としてきた。この本研究の期間中には、教員養成系大学院の教職大学院化が急速に進んでおり、本研究が目指してきた内容は教職大学院での教科専門の位置づけに関してモデルとなり得ると考える。本研究プロジェクトを通じて、当初の計画どおり、数学者と数学教育学者が協働して教材研究・授業開発を行い具体的な成果を上げたのみならず、そうした教材研究・授業開発の研究手法を足掛かりに、教職大学院を舞台に数学と数学教育学を架橋する研究手法を生み出し、教師教育に還元することまでを始めることが出来たと考える。

研究成果の概要(英文)：This study has aimed the realization of the research method in which mathematics and mathematics education are united, based on some theoretical frameworks. Starting from the theoretical study on teaching materials developed by co-operative studies between mathematicians and mathematics education researchers based on APOS theory, we have proceeded towards practical class developments. As a result, our study involved some students at the professional schools of teacher education and successfully elaborated some practical research results. In the research process, with the help of theoretical frameworks such as anthropological theory of didactics, APOS theory or the theory regarding the role of mathematical proof, the activation of the knowledge as mathematicians along with the mathematics educational frameworks led to the successful class developments and, in our research, this research methods of uniting mathematics and mathematics education were established.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学と数学教育学の融合 APOS理論 教授人間学理論

1. 研究開始当初の背景

本研究の開始当初は、ちょうど教員養成系大学大学院の教職大学院化が急速に加速していく最中にあり、特に、教科教育分野が教職大学院に組み込まれることが求められていた。その際には、数学でいえば、数学者と数学教育学者の協働の中から生み出される新たな研究手法や研究領域が必要となる。それまでにも、数学と数学教育学の架橋をスローガンに掲げ、数学者と数学教育学者の協働の中で新たな研究を生み出そうとする試みはあった。例えばそうした試みは、教職大学院化という外的要因の中で、教員養成に籍をおく数学者が数学教育にも関わらざるを得ない状況から発生したものだったかもしれない。またもちろん、そうした後ろ向きな要因だけでなく教員養成に対する高い意識により数学・数学教育学の双方から協働を目指した試みもあったであろう。しかし、両者の架橋・融合から授業開発へと至る具体的な研究手法・研究領域が生み出されていたかという点はまだ不完全であったといえる。それにはいくつかの要因が考えられる。一つは、これに取り組むことに対する意識の問題がある。もしもこれに取り組む数学専門の側(数学者)が、自分の本業は数学であって、副業としてこうした研究に取り組むという意識であるならば、これは不十分であり、真摯に新たな研究領域を自分の研究の本道として生み出す覚悟で事に当たる必要があると考える。本研究の代表者は確かに数学者としての経歴があるが、これまで10年以上に渡って数学教育学研究にも取り組み、数学教育学の研究業績についても一定の成果を上げてきていた。また、後述するように、本研究プロジェクトのメンバーは、教職大学院化を率先して進めている同一の教員養成系大学院に所属しており、それに対応するべく数学と数学教育学を架橋する研究領域の開発に向けて、今後の自分自身の生息地として真摯に取り組む状況にあった。

もう一つには、数学と数学教育学の架橋・融合という目的はあっても、手段が明確でなかったことが挙げられる。スローガンだけでは研究は進まない。そこで、数学と数学教育学を架橋させた研究手法にも有効と考えられる理論枠組みに着目した。具体的には、教授人類学理論(Anthropological Theory of the Didactic, 以下ATD)における教授学的転置理論や、APOS理論といった理論である。実は、教授学的転置理論やAPOS理論は本来こうした架橋のための理論ではない。しかし、数学者のコミュニティから授業実践の場までの知識の転置を考える教授学的転置理論の考え方は本研究の理論枠組みとしても機能すると考えられるし、数学的概念の学習の際に形成される心的構造物を数学・授業実践の両面からモデル化して教材研究・授業開発に取り組むことを可能とするAPOS理論もまた、架橋による授業開発にむけた手法を提案できるものと考えた。

こうしたことを背景に、本研究では、「ATDやAPOS理論といった数学と数学教育学の架橋にも有効と考えられる理論枠組みを用い、数学と数学教育学を融合させた教材研究・教材開発・授業開発を行うことで、どのような新たな研究手法・研究領域が生じるだろうか。」という問いを研究の中心にすえた。

2. 研究の目的

上でも述べたように、理論枠組みを用いて、数学と数学教育の架橋・融合による教材研究・授業開発を行うことが、本研究の主要な目的であるが、より具体的には、つぎの3つに整理できる。

1. 中等教育における単元、例えば、1次関数、微分・積分、数列や数学的帰納法などを、具体的に設定し、数学と数学教育学を架橋する視点で、理論枠組みに基づいて教材研究を行う。教授学的転置理論は、教育内容について考えるとき、学問としての数学にだけ、あるいは、学校の中での閉じた数学にのみ目を向けるのではなく、学問としての数学から教育内容としての数学への「転置」の過程に目を向ける必要があると主張し、そのための基本的なモデル(Reference Epistemological Model, 以下REM)を要請する。また、APOS理論もまた、特定の数学概念を学習者が獲得する際に、どのような心的構造物をどのような過程で構成していくかを理論的にモデル化したGenetic Decomposition(起源分解)を要請する。こうしたモデルを数学と数学教育学の両面から検討し、教材研究を深めていく。
2. 中等教育における単元を設定し、上述のモデルに基づいて授業開発・授業分析を行う。特に中等教育に焦点を当てているのは、教科専門と教科教育の架橋においては中等教育の方が効果を発揮しやすいと考えたからである。教授学的転置理論は学ばれるべき数学内容の検証の視点、APOS理論はその授業開発への視点を提供するだろう。また、いずれにも数学と数学教育学の両者の視点が取り込み可能であると考ええる。
3. 上述の研究手法の確立・モデル化、そしてそこで必要となる数学的知識を同定し、教師教育への還元を検討する。従来、教員養成系大学における教科専門、例えば数学でいえば数学専門の内容は、理学部・理学研究科における数学研究を基盤とするスタッフが、理学研究的視点から重要と考える内容を選択することが一般的だろう。自分自身も数学を基盤とする者としてその観点には一定の理があると考ええる。しかし、教員養成系大学が目指すものは、当然ながら教員の養成であり、数学と数学教育学を融合させた教材研究・授業開発の具体的過

程までを視野にいれ、そこで必要となる数学的知見という観点から、教員となる者が身につけるべき数学的資質を整理することができれば、教師教育にも大きな還元が見込まれる。特に、この本研究の期間中には、教員養成系大学院の教職大学院化が急速に進んでおり、本研究が目指してきた内容は教職大学院での教科専門の位置づけに関してモデルとなり得ると考える。

3. 研究の方法

上述のような、教員養成系大学での数学と数学教育学の架橋や数学専門の在り方までを視野にいたれた研究を行う方法として、一つには、複数の教員養成系大学間で相互に情報を交換し、数学の教科専門の在り方について包括的に検討するという方法も考えられるだろう。だが、本研究では異なる方法をとった。つまり本研究ではその研究体制を、同一の教員養成機関のなかの同じ数学教室のスタッフ4名とした。本研究は、教職大学院での数学・数学教育学の架橋を包括的に考えるというより、むしろ具体的に数学と数学教育学のスタッフが同一機関の中で協働を実践し、スピード感をもって、外延的に数学と数学教育学の架橋・融合・協働の在り方を検討することを目指してきたのである。喫緊な研究課題に対する研究体制・研究方法としてはむしろこれが望ましいと考えた。

具体的な研究の方法としては、次のように進めてきた。

- ・ 研究計画の初年度・第2年度は、中学校の1次関数という単元を取り上げ、APOS理論を含めたいくつかの理論枠組みから、数学者と数学教育学者が協働で教材研究を実施し、成果を上げることを目指した。また、そこで得られた成果をICME14(第14回数学教育国際会議)で発表することを目標にしていた。
- ・ 第2年度には本プロジェクトのメンバーが所属する兵庫教育大学大学院において、教科教育分野が全面的に教職大学院化されたこともあり、第3年度以降は、教職大学院の大学院生も巻き込む形で、理論研究だけでなく、実践研究へと軸足を移行していった。具体的には、教授人間学理論、APOS理論のほか、教授学的状況理論、証明の機能論などを取り込み、数学者としての知見を最大限に活用しながら、高校での授業実践開発を実施してきた。
- ・ 教職大学院の大学院生を巻き込むことで、本研究が当初に目指していた、数学の知見を活かしながら、その知見を数学教育学の理論と架橋させ、新たな授業実践開発を行うという教職大学院での新しい学びのスタイルの開発へと進むこととなった。

4. 研究成果

本研究では数学と数学教育を融合させた研究手法を、いくつかの理論枠組みを用いて具体化していくことを目的としてきた。実際、この本研究の期間中には、教員養成系大学院の教職大学院化が急速に進んでおり、本研究が目指してきた内容は教職大学院での教科専門の位置づけに関してモデルとなり得ると考える。以下、初年度から順を追って、研究成果を紹介する。

初年度(H30)には1次関数を取りあげ、example space(cf. Watson & Mason, 2005)、および、APOS理論(cf. Arnon et al., 2014)の理論枠組みを援用し、数学、数学教育学を専門とする研究者が共同で、その在るべき発達や様相に関する研究を行った。具体的には、2018年の中学生を対象とした全国学力学習状況調査の結果を起点として、中学生の一次関数に対する理解の困難性について論じている。Example spaceという理論の観点から考えると、授業では1次関数の内包的な定義が明示され進められていったとしても、実際の生徒らの理解は、例に触れながら外延的に進んでいる可能性が高いことが指摘される。そのため、一次関数の深い概念理解に至るためには、例を基にした理解から一歩すすめて、定義に基づく内包的な理解へと至ることが重要となる。この外延的理解から内包的な理解へと進むプロセスを記述するのに、我々はAPOS理論におけるスキーム発達の理論枠組みを適用し、生徒の一次関数に関する概念理解(コンセプト)の様相を論じた。この考察は、次年度(R01)に研究論文としてまとめあげ、採択・発行されるに至った。また、この研究での協働を通して、APOS理論についての共通理解が進むこととなった。APOS理論については、国際的には様々な研究が進められているが、国内でAPOS理論を枠組みとした研究は極めて少なく、本論文はAPOS理論を国内に広める研究成果としても意義があるものだったと考える。

第2年度(R01)には、Duvalの記号的表現に関するレジスタ理論を用いて、1次関数の理解に関するさらなる考察を行った。1次関数という関数族は、日本語では字義通り「1次式で表される関数」であるが、海外、たとえば英語圏では、「first degree function(1次の関数)」と呼ばれることはほとんどなく、「linear function(直線状の関数)」と呼ばれる。つまり、英語の文化では、「1次関数」という概念には直線との関係がアプリオリに組み込まれており、直線に関わらずにこの概念を導入することは考えにくい。一方で、日本語では「1次式で表される」という性質がアプリオリであり、そのグラフはどのようになるかという問いがそれに付随する形となる。そのため、式表現レジスタでの操作がプライマリとなり、ともすればグラフを想像することなく解決可能な問題も多い。Duvalは、一つの表現レジスタのなかで閉じた操作ではなく、異なる表現レジスタの間の変換を通して、数学的概念の理解が深まることを指摘しており、用語としての「1次関数」が概念理解に与え得る影響について考察を行った。この研究はICME14(数学教育国際会議14、当初の開催予定地は上海)の研究発表として投稿し、採択された。ただし、

ICME14 は新型コロナウイルス拡大の影響により、1年延期され、実際の研究発表は令和3年となった。

尚、本研究の第2年度（令和元年）から、本研究プロジェクトのメンバー全員が所属する兵庫教育大学の教科教育分野は全面的に教職大学院化されたこともあり、第2年度（R01）から第3年度（R02）にかけて、これまで理論研究中心だった本プロジェクトを、教職大学院の大学院生を巻き込む形で実践研究へと広げていった。また、令和2年度開始当初は、全世界的に新型コロナウイルスの感染拡大が広がり、国内でも各種学校が一時期間閉鎖される状況となっていたため実践研究の遂行も危ぶまれたが、夏の頃から各種学校の教育も再開されたため、授業実践に基づく新たな研究展開、つまり授業開発のフェーズへ入ることができた。具体的には、教授学的状況理論に基づく高等学校でのアクティブ・ラーニングの実現に関する研究である。教授学的状況理論は、授業における学習の状況をモデル化していくという数学教育学の理論であるが、この理論から開発されるべき教材の特性は示唆されても、この理論だけでは具体的な教材の開発には至ることが出来ず、やはりそこには数学の知見が必要である。より具体的にいえば、その理論で目指される学習の状況（＝亜教授学的状況）の実現のためには、適切なミリュウ（生徒をとりまく数学に関わるもの・事柄）の設計が不可欠となるが、そこに数学の研究からの知見・経験が生かされる余地があり、本研究の展開に適合的と考えたのである。ミリュウとは、日本語でいう教材を含み、さらに広くとらえられる概念である。

教授学的状況理論では、生徒は、さまざまな矛盾や困難を生み出すミリュウと対峙し、これへの適合を繰り返すことで学習が進むとされる。しかし、ともすれば、生徒はミリュウと向き合うことをやめ、教師がどんな回答を望んでいるかを考え、教師から答えを引き出そうとしてしまうことがある（教授学的状況）。本研究の第3年度（令和2年度）の研究では、高校数学の対数の導入場面でのミリュウの設計を工夫し、亜教授学的状況を実現するような授業開発を行った。この研究成果は、全国数学教育学会にて研究発表を行い、現在研究紀要論文として投稿中である。

最終年度（令和3年度）の研究は、引き続き教職大学院の大学院生を巻き込み、理論枠組みに基づく数学と数学教育学を架橋した成果を、教育実践研究としてまとめるフェーズに入った。具体的には、教授人間学理論（ATD）を参照しつつ高等学校で学習する論理概念の存在理由の顕在化を意図する授業開発、また、数学的証明の機能論の研究を参照しつつ高校生に証明の理解の面白さを伝える授業の開発等である。いずれも数学教育学の理論枠組みを参照しつつ、それを具体化する場面では数学の知見が数学教育学の知見と融合的に機能しており、理論研究・実践研究、教師教育が一体化する研究活動となった。この2つの実践研究はいずれも全国数学教育学会（第55回研究発表会）にて発表し、2件とも論文として投稿中である。以下、これらの2つの研究成果について概説する。

1つは、高校数学での学習内容に存在意義を伴わせることを意図した実践研究である。具体的には、高等学校で学習する「必要条件」「十分条件」といった論理概念について、その存在意義を顕在化させる教材開発・授業開発を行った。実際、「必要条件・十分条件」という概念の理解・定着には古くから困難性があることが指摘されている（森，1986,1993）。一方、本研究で理論枠組みとして用いることが検討されてきた教授人間学理論における教授学的転置の理論では、学習する数学の内容について、数学的概念、パラ数学的概念、プロト数学的概念という3種があることが指摘されている（Chevallard, 1985/1991; Brousseau, 1997）。学習すべき直接の対象となるのが数学的对象であるが、中には、学習すべきものではあるが、直接的にそれが学習の対象となるというよりも、数学的对象の内容の学習のためのツールとして用いられるメタな対象（パラ数学的对象）や、「使用や実践に際して暗黙裡に起動され、その性質はある種の問題の解決に使用されているのであるが、それ自体は直接的な学習の対象でも、ツールとしても認識されない」ような対象（プロト数学的对象）も存在する。高校で学習する「必要条件」「十分条件」といった概念は、本来プロト数学的对象であるにもかかわらず、そのようなプロト数学的对象の機能に焦点があてられることなく、無理に数学的对象として学習が設計されているがゆえに、学習内容の存在意義が顕在化することなく、「矢印（ \rightarrow ）の先が必要」といった無意味な丸暗記に陥り、結果として理解も定着も困難となっているのではないか。本研究では、数学者としてのこうした概念の使用経験や、教授学的転置の理論、および「必要・十分条件」の学習に関する先行研究に依拠して、そうした指摘を行ったうえで、「必要条件・十分条件」の本来のプロト数学的对象としての機能を意識させるような高校段階での授業実践を開発した。

もう1つは、証明の面白さを生徒に伝えることを意図した実践研究である。これまでの実践の経験を振り返ってみると、探究的な活動のなかで数学的对象の中から規則性を見出す活動は高校生にとっても面白さを感じる人が多いように感じられるが、高校数学においては規則性を見出すことで終わるのではなく、それが何故なのかの考察、つまり証明の考察に焦点を当てていきたい。しかし、高校生にとって、規則性の発見に面白さを感じても、証明の考察に面白さを感じることは稀であるように思われる。この点について、証明の機能論を振り返ってみると、証明の「立証」という機能に焦点を当てていては、すでに正しいと確信している規則性について証明しようという意欲が高まらないことも理解できる。そこで、証明の持つ「説明」の機能に焦点を当てた授業開発を意図することとした。小松(2007)は、証明の持つ「説明」の機能について、数理哲学における先行研究を基に考察し数理哲学の研究における『説明する証明』とは「対象の特徴的な性質を用いて、当該の命題の真偽だけでなく、関連する他の命題の真偽も考慮に入れて、命題が真である理由が示されているような証明」と述べている。ただ、本研究では「証明の

記載の仕方」よりも、「そのような証明の理解の仕方」に焦点を当てることとし、「説明する証明の理解」という証明の理解の仕方を次のように規定したうえで、そのような理解を促す授業を開発した：「説明する証明の理解」とは、「何らかの命題や規則が、それにかかわる対象のもつどの特徴的な性質にどのように依拠して成立しているかに気付いており、それにより関連する他の命題の真偽も推測できうる」というような理解のことである。授業の開発に当たっては、そのような数学教育学的授業の組み立てを枠組みとして、この枠組みに当てはまる数学的知識や学習内容・教材を開発していく必要がある。ここでは、2次方程式の解と係数の関係を使った標準的問題を、数列や漸化式と結びつけるという教材を開発した。こうした教材を見出した背景には、教材には直接明示されないが、線形代数などの数学的知見が働き、そうした知見から高校数学の内容を教材研究する視点が有効に機能していると言えるだろう。開発した教材は授業実践として具現化され、その実践結果の分析から、証明の面白さを生徒に伝えるという点において有効性が確認された。一方で、「説明する証明の理解」の深まりについては、改善すべき点も見出され、今後の実践開発への示唆も得られた。

以上の成果を踏まえ、本研究プロジェクトを通じて、当初の計画どおり、数学者と数学教育学者が協働して教材研究・授業開発を行い具体的な成果を上げたのみならず、そうした教材研究・授業開発の研究手法を足掛かりに、教職大学院を舞台に数学と数学教育学を架橋する研究手法を生み出し、教師教育に還元することまでを始めることが出来たと考える。

参考文献：

- 小松孝太郎(2007), 学校数学における証明の機能「説明」に関する一考察, 日本数学教育学会第40回数学教育論文発表会論文集, 637-642
- 森正雄 (1986) 「数学教育における日本語について - 「ために必要」と「ための条件」の考察 - 」日本数学教育会 数学教育論文発表会要項 発表会要項 19, pp.133-136 .
- 森正雄 (1993) 「「必要条件」「十分条件」の指導について：理解の実態調査に基づく改善への提言」日本数学教育会誌 75(5), pp.121-128 .
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Octaç, A., Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer Science+Business Media New York.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.
- Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 濱中裕明, 川内充延, 吉川昌慶, 加藤久恵	4. 巻 25(2)
2. 論文標題 一次関数の深い概念理解を捉える枠組みの検討 example spaceとAPOS理論のSchemaの視点から	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 全国数学教育学会誌 数学教育学研究	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 檀皮寛治・濱中裕明
2. 発表標題 数学的な面白さを感じさせる授業について：「説明する証明の理解」を目指した授業実践
3. 学会等名 全国数学教育学会第55回研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 濱中裕明・相馬智紀
2. 発表標題 「必要条件」という概念の存在理由の顕在化：論理概念の高校数学における生息可能性
3. 学会等名 全国数学教育学会第55回研究発表会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroaki Hamanaka, Masayosi Yoshikawa, Hisae Kato, Mitsunobu Kawauchi
2. 発表標題 Semiotic Character and Issues in the Learning and Teaching of Linear Functions in Japan: The influence of Terminology
3. 学会等名 The 14th International Congress on Mathematics Education (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 濱中裕明, 勝谷紗英
2. 発表標題 対数関数の導入授業におけるアクティブ・ラーニングの実現 教授学的状況理論を用いて
3. 学会等名 全国数学教育学会 第53回研究発表会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiroaki Hamanaka, Koji Otaki, Ryoto Hakamata
2. 発表標題 Introducing group theory with its raison d'etre for students
3. 学会等名 Third conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 濱中裕明, 川内充延, 吉川昌慶, 加藤久恵
2. 発表標題 一次関数の概念理解についての一考察 example space と APOS理論のSchemaの視点から
3. 学会等名 全国数学教育学会 第49回研究発表会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	加藤 久恵 (Kato Hisae) (00314518)	兵庫教育大学・学校教育研究科・准教授 (14503)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	吉川 昌慶 (Yoshikawa Masayoshi) (10757743)	兵庫教育大学・学校教育研究科・准教授 (14503)	
研究分担者	川内 充延 (Kawauchi Mitsunobu) (50737624)	兵庫教育大学・学校教育研究科・准教授 (14503)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関