様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月 １１ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｋ０３２０６

研究課題名（和文）パスの数え上げを軸とした表現論的組合せ論の研究

研究課題名（英文）Combinatorics related to representation theory and enumeration of paths

研究代表者
沼田　泰英（NUMATA, YASUHIDE）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：００４５５６８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，Hook Length formulaとよばれる数え上げ公式の全単射による証明を与えるにあたって鍵となる Hillman-Grassl アルゴリズムと呼ばれるアルゴリズムについての研究に取り組みました． 特に，グラフ上のパスの数え上げとしてHilmann-Grasslアルゴリズムを再定義する研究を行いました．その研究の中で得られた組合せ論に関する知見を活かし，組合せ論的な構造からきまる代数系などについても，研究をしました．特に，トグリング群の構造に関する研究，多面体の面構造に関する研究，可換環の強レフシェッツ性に関する研究を進め，それぞれに研究成果を得ました．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究では，組合せ論的構造に着目し，それらがコントールする代数的対象や多面体について研究を行いました． Hook Length formulaに対する研究では，鍵となるアルゴリズムに対し，一般化をした上で統一的な解釈を行いました．代数系や多面体に対する研究では，多面体の面の特徴付け与えるなどといった結果を得ており，今後の研究に繋がることが期待できます．

研究成果の概要（英文）：We study an algorithm called Hillman-Grassl algorithm, which is used for a bijective prof of Hook Length formula. We introduced axioms to generalize the algorithm. In our theory, the algorithm is realized as an algorithm to create a path in some graphs.
Moreover we apply our knowledge, obtained by this study, to the other tartgets as follows: 1. We study artinian gorenstein algebras defined by the weighted generating function of matcings. We show the Lefschetz property for the algebras. 2. We also study a quotient algebras monomial ideals. We calculate the determinants of multiplication map in the algebra. We show the Lefschetz property for the algebras. 3. We also study the structure of the toggling group of a path graph. We show the toggling group is the symmetric group on the independent sets of the path graph. 4. We also a polytope defined by a directed graph. We call it the directed edge polytope. We give an characterization for faces and facets of the polytope.

研究分野：表現論的組合せ論

キーワード：Bijective proof　グラフ　Hook Length formula　強レフシェッツ性　トグリング群　directed edge polytope

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

ヤング標準盤の数え上げ公式で Hook length formula と呼ばれる公式がある． この公式は様々な視点から解釈をすることができる重要な公式の一つであり, 様々な証明が知られている．また所謂 q 類似と呼ばれる精密化も知られており, ヤング標準版に関する多くの情報を持っていると考えられる．この公式の証明方法の一つに Hillman-Grassl アルゴリズムを用いた全単射による証明がある． この全単射はコンテントと呼ばれる不変量を保存するという意味で良い全単射である．

ヤング標準盤以外にも Shifted Young tableaux などにも, Hook length formula と呼ばれる公式が知られている．より一般に d-complete poset と呼ばれる poset を一つ固定し, その poset 上の linear extensions を考えると, その総数に対する Hook length formula が知られている．d-complete poset の例として, ヤング図形があり, ヤング図形上の linear extension はヤング標準盤であり, d-complete poset での Hook length formula は古典的なヤング盤の数え上げに関する Hook length formula の自然な一般化と思うことができる．d-complete poset での Hook length formula にも q 類似があるなどと言った点でも自然な一般化であると思える．d-complete poset そのものについても研究されており, 既約な d-complete poset の分類などもすでに与えられている．

古典的な Hook length formula と同様, d-complete poset での Hook length formula にもいくつかの証明が与えられている. その中には, Hillman-Grassl アルゴリズムの類似アルゴリズムから決まる全単射による証明もある．しかしながら, それは, 既約な d-complete poset の分類に依存しており, 一部の既約な d-complete poset に対して与えられているに過ぎない．また, 与えられているアルゴリズムも既約な d-complete poset の種類ごとにアドホックに与えられている状況である．

２．研究の目的

Hook length formula と呼ばれるヤング標準盤の数え上げ公式は, d-complete poset の linear extensions の数え上げ公式として一般化され証明されているが, その bijective proof は一部の既約な d-complete poset に対してアドホックに与えられているに留まる．本研究では, アドホックに与えられているアルゴリズムを, 広い意味での Lattice path method からの視点で再定義し, 統一的な記述を与えることを目的とする． 統一的な記述を与え, 本質を抜き出すことで, 更に広い対象に対して， Hook length formula の Hillman-Grassl アルゴリズムによる bijective proof を与えるも目的である． また, これらに対する研究の中で得られる知見を, 他の組合せ論的対象に対しても応用し, 組合せ論的対象がコントロールする代数系などの構造についても研究を行う.

３．研究の方法

d-complete poset の linear extensions の数え上げ公式である Hook length formula に対する bijective proof で鍵となる Hillman-Grassl アルゴリズムを, 既約な d-complete poset ごとの特殊事情による記述をやめ, 統一的な記述をする必要がある．そのために, Hillman-Grassl アルゴリズムに対し, 広い意味での Lattice path method を使った解釈を行い, 再記述する．つまり, Hillman-Grassl アルゴリズムはあるグラフ上の path を構成するアルゴリズムであると認識し, グラフ上の path の選択方法として Hillman-Grassl アルゴリズムを記述する．その上で, Hillman-Grassl アルゴリズムが正しく走るための十分条件を抽出し, Hillman-Grassl アルゴリズムが正しく走る poset のクラスを公理化することを試みる． Hillman-Grassl アルゴリズムが正しく走る poset のクラスの公理化ができれば, d-complete poset がこの公理を満たすことを示せば目的が達せられる．d-complete poset がこの公理を満たすことを, 既約な d-complete poset の種類ごとにアドホックに示しても, 十分である．そのため, まず， Hillman-Grassl アルゴリズムが正しく走る poset のクラスを公理化を行うことが必要である．

Hillman-Grassl アルゴリズムをあるグラフ上の path を構成するアルゴリズムであると考え研究を進めるため, この研究を行うにあたって, グラフ上の path に関わる知見が得られる． また, もともと d-complete poset や Hook length formula が表現論などとも関連する研究対象であるので, 表現論的組合せ論に関する知見も得られる．ここで得られた知見を, Hillman-Grassl アルゴリズム以外の研究対象に対しても応用できないかを考察する．特に, 組合せ論的対象がコントロールする代数系などの構造などに応用できないか考察する.

４．研究成果

Hook Length formula とよばれる数え上げ公式について着目し, 特に, その公式の全単射による証明を与えるにあたって鍵となる Hillman-Grassl アルゴリズムと呼ばれるアルゴリズムについての研究を進めた. 特に, ヤング図形やその類似物である d-complete poset と呼ばれる対象の一部にケースバイケースの方法で与えられている一連のアルゴリズムに関して統一的な記述を与えることを目標に研究を進めた.

対象となっているアルゴリズムを走らせるために十分な条件を公理として課した半順序集合においては, 広い意味での Lattice path method を用いることで, Hillman-Grassl アルゴリズムの類似のアルゴリズムを構成することが出来た. また, Swivel と呼ばれるクラスの d-complete poset を含まないような d-complete poset のうち既約なものについては, 与えた公理を満たすような実現があることを, 具体的に実現を構成することで示すことが出来た. 実現を与え構成的に示すことは不変量に対する考察などを可能にするため, 重要なステップである. Swivel を含まない d-complete poset で既約ではないものについては, これらを組み合わせることで実現を与えることが出来る. Swivel-free な d-complete poset については, 格子上のパスの数え上げとして, Hilmann-Grassl アルゴリズムを捉えるにあたって必要となる公理化・定式化についてできたことになる. 一方, この定式化では, Swivel のケースではうまく行かない. この公理を満たすということが, swivel-free d-complete poset の特徴づけになっているという予想を持っている.

グラフ上の path を構成するという観点から研究を進めたことによって得られた知見を, Hillman-Grassl アルゴリズム以外の研究対象にも応用を試みた. 特に, 組合せ論的対象がコントロールする代数系や多面体について研究を行い成果を得た. 以下でそれらについて説明をする.

可換環の Lefschetz 性に関連する研究を行った. コンパクトケーラー多様体のコホモロジー環が満たす Hard Lefschetz Theorem と呼ばれる性質を, 一般の可換環で定式化したものが Lefschetz 性である. 可換環が与えられたときに, その可換環が Lefschetz 性を持つかという自然な問題が考えられる. 特に, その可換環が組合せ論的なデータから決まっている場合には, 組合せ論的データの情報を用いて Lefschetz 性を調べることができる可能性がある.
グラフのマッチングの重み付き母関数により定義されるアルチンゴーレンシュタイン環について考察をし, 特に完全グラフ内のマッチングから決まる環の強レフシェッツ性を示した. 標数 0 の体上の多変数多項式環を考えたとき, 斉次多項式の消去イデアルは次数付きイデアルとなり, その剰余環はアルチンゴーレンシュタイン環となる. この環は, ポアンカレ双対性とよばれる非退化二次形式を持っており, コホモロジー環の類似物と思うことができる. コホモロジー環の Volume form に相当するものが, 消去イデアルを定義する斉次多項式である. この環は, 一般には幾何的な対応物があるとは限らないものの, 良い性質を持っていることが期待できる. 定義に用いる多項式として, 完全グラフ内のマッチングの重み付き母関数を考え, 高次ヘッセ行列の特殊値について研究を進めた. この環の高次ヘシアンの計算が, 基本対称式の高次ヘシアンに帰着できることがわかった. この研究の成果として, コホモロジー環において Hard Lefschetz Theorem として知られる性質を, この環が満たしていることを示した. 基本対称式は, 一様マトロイドの基底母関数であり, これらの間に某かの良い関係が期待できることが示唆されている.
また, 2 変数の完全交叉環は強 Lefschetz 性に関連する数え上げ問題についての研究も行った. 具体的には, 2 変数の完全交叉環は強 Lefschetz 性をもつことが知られており, その掛け算写像の標準的な基底に関する表現行列は二項係数を成分とする良い形の行列であり, その行列式は Giambelli の公式で計算することができ, 具体的な値がヤング盤の個数として計算できる. Giambelli の公式における, 二項係数を基本対称式に, ヤング盤の個数を Schur 多項式に, それぞれ置き換えた公式が Jacobi-Trudi 公式という名で知られている. 先行研究では Giambelli の公式が現れていた部分を Jacobi-Trudi 公式が現れるような形に, 問題を自然に一般化することができた. 問題の一般化の方法は以下の通りである: Ledscetz 性を考える際に, 通常は 1 次の元を固定しその冪を考える. 1 次の元を固定せず積を取ると, 表現行列の成分には係数の基本対称式が現れる. 特に, 2 変数の完全交叉環の場合には, この表現行列が良い形をしており, その行列式は Schur 多項式として計算ができる.

トグリング群と呼ばれる組合せ論的データから決まる群についての研究を行った. グラフを一つ固定しそのグラフの独立集合を全て集めた集合を考えると, その集合にに対するトグリングと呼ばれる作用を考えることができる. Asymptotic combinatoircs という分野における homomesy と呼ばれる性質の研究の文脈においてトグリングという作用は登場し組合せ論的表現論とも密接に関連し研究が進められている.
トグリングで生成される群の構造についての研究で成果を得た. 特に, A 型の Dynkin 図形, つまりパスグラフ, の独立集合達に対するトグリングが, A 型の Dynkin 図形の独立集合のなす集合上の対称群を生成するという事実について, 構成的な証明を共同研究で与えることができた. この事実は, 言い換えると, トグリングで生成される群の, 独立集合のなす集合への作用が, fully-transitive であるということを意味している. 一般のグラフにおいてはトグリングでは対称群を生成できない様なものがあり, この事実は A 型 Dynkin 図形の何らかの特殊性に由来していると考えられる.

有向グラフに付随して決まる多面体についての研究を行った. 有向グラフが与えられたとき, 頂点をユークリッド空間の基本ベクトルに対応させ, 辺をその端点に対応する基本ベクトルの差と思ったとき, 辺に対応するベクトルで張られる多面体というものが自然に定義できる. これを Directed edge polytope とよぶ. Directed edge polytope の特別な場合として, 無向グラフに対

して定まる edge polytope が含まれる. またルート系に対して定まるルート多面体という多面体も含まれる.

Directed edge polytope について共同研究を行い, その多面体の面を与える部分グラフの特徴付を与えることに成功した. Directed edge polytope の面は, 元の有向グラフの部分グラフに対応する多面体として与えることができるが, 部分グラフが facet となるための必要十分条件を与えた. どの様な閉パスを考えても進行方向に対し順方向な辺と逆方向の辺の数が等しくなるようなグラフにはランク関数と呼ばれる関数が定義できるが, 面の特徴づけにおいてはランク関数の存在が重要な役割を果たしている.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Yasuhide Numata, Yuiko Yamanouchi	４．巻 Volume 5, no. 1
２．論文標題 On the action of the toggle group of the Dynkin diagram of type A	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Algebraic Combinatorics	６．最初と最後の頁 149-161
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/alco.204	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　0件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 Yasuhide Numata
２．発表標題 On the face poset of directed edge polytopes
３．学会等名 Characteristic Polynomials of Hyperplane Arrangements and Ehrhart Polynomials of Convex Polytopes（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Y. Numata, Y. Takahashi, D. Tamaki
２．発表標題 Faces of Directed Edge Polytopes
３．学会等名 The 35th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics,（国際学会）
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計2件

国際研究集会 Afternoon Seminars on line	開催年 2020年～2020年

国際研究集会	開催年
Probability, Statistics, Matrix, in Tachikawa, 2019.	2019年～2019年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関