

令和 5 年 6 月 7 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03260

研究課題名(和文) 保型多重L-関数と保型多重ポリログのアソシエーション

研究課題名(英文) Association of multiple modular L-functions and polylogarithms

研究代表者

井原 健太郎 (Ihara, Kentaro)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：00467523

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：Rankin積との関係などを含め、保型多重L-値のなす周期代数と調和積の構造に興味を持たれる。近畿大の中村氏と慶応大の山本氏との共同研究により、多重ゼータ値のメルン積分表示を得た。これにより、調和積がその被積分関数の積を起源として得られることが判明した。この研究のシャッフル積版として、近畿大の石橋氏との共同研究で、多重フルヴィッツポリログのメルン積分表示を得た。また、近畿大の中村氏らとの研究にて、多重フルヴィッツゼータ値の大野・Zagier型関係式を得て、この結果は2022年に専門誌に掲載された。近畿大の松田氏との最近の結果として、保型多重L-値とDedekindゼータ値との関係が見つかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

保型形式と呼ばれる関数に対して、周期という積分を用いて表示される特別な数が定まる。本研究では、従来の周期の多重化を考察した。様々な保型形式を考え、その多重化された周期の全体に備わる構造の研究を行った結果、保型形式以外の整数論に現れる種々のゼータ関数やL関数、またポリログ関数の多重化との関係をいくつか見つけることができた。例えば、保型形式にも関連するポリログ関数やフルヴィッツ型のポリログ関数のメルン積分による表示を発見することができた。

研究成果の概要(英文)：One of the natural questions on the period algebra associated to multiple automorphic L-values is whether the algebra is equipped with the harmonic product, including the connection with Rankin convolution. In collaboration with Dr. Nakamura of Kindai University and Dr. Yamamoto of Keio University, we obtained the Mellin integral representation of multiple zeta values. It turns out that the harmonic product originates from the product of its integrands. As a shuffle version of this research, in collaboration with Mr. Ishibashi of Kindai University, we obtained the Mellin integral representation of multiple Hurwitz polylogs. In addition, through research with Dr. Nakamura and others at Kinki University, we obtained the Ohno-Zagier type relations for multiple Hurwitz zeta values, and this result was published in a journal in 2022. As a recent result with Mr. Matsuda of Kindai University, we found a relationship between automorphic multiple L-values and Dedekind zeta values.

研究分野：整数論

キーワード：multiple L function multiple zeta values elliptic modular form harmonic product Mellin transformation Hurwitz zeta function Dedekind zeta function

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の目的は、近年進展著しい多重ゼータ関数の理論を礎にし、従来の保型形式に付随する L-関数の理論の「多重化」を構築することにある。その最重要な課題として、保型多重 L-関数の正整数点における特殊値「保型多重 L-値」の生成する代数「周期代数」の構造を解明する問題がある。Drinfeld アソシエーターは、反復積分とその積構造を代数的に取り扱うための装置であり、多重ゼータ理論で大きな役割を果たしている。そこで、周期代数を調べる一つの手法として「保型版アソシエーター」と「保型多重ポリログ」を新たに導入し、保型版アソシエーターの性質を用いるというのが当初のアイデアであった。

2. 研究の目的

保型多重 L-関数の正整数点における特殊値「保型多重 L-値」の生成する周期代数の構造を調べることが目的であるが、具体的には、保型多重 L-値の間の線形関係式の存在、代数としての積構造、保型形式間の関係がどれほど保型多重 L-値間の関係をもたらすかなどに主眼をおいて研究を行った。また、保型多重 L-値以外の、種々のゼータ関数や L-関数の多重化と保型多重 L-値との関係性も重要な問題で、この解明も目的の一つとした。

3. 研究の方法

保型多重 L-値の性質解明の方法として、保型多重ポリログと保型版アソシエーターの活用を試みた。また、保型多重 L-値と調和積の関係解明を念頭に、多重ゼータ値の調和積を積分表示の視点から見直す研究を行った。また、よく知られている保型形式の L-関数と代数体に付随する Dedekind ゼータ関数の関係に着目し、多重化という視点で、多重 Dedekind ゼータ値を導入した。また、ゼータ関数を通じた保型多重 L-値と多重 Dedekind ゼータ値の関係についての研究を行った。

4. 研究成果

2019 年度までの研究実績として、多重ゼータ値を筆頭とする種々の多重化されたゼータ関数や L 関数が満たす「調和積」の根本的な構造について進展が得られた。この調和積は上記の保型多重 L-値「周期代数」には直ちには備わらない積構造であるが、Rankin convolution と呼ばれる操作で得られる保型形式の L 関数の多重化と関係することが期待される大事な構造である。近畿大学の中村弥生氏との研究により、多重ゼータ値の深さ分の変数をもつある基本的な多変数有理関数の系列を見つけ、従来の多重ゼータ値の調和積が、実はその有理関数同士の積から導出できることを解明した。また、近畿大の関谷氏との共同研究として得られた、ベルヌーイ数の計算方法である秋山・谷川アルゴリズムに現れる 2 重数列の母関数の明示公式に関する論文が近畿大学理工学総合研究所紀要「Science and Technology」No 31, 2020, pp1--3. に掲載発刊された。

2020 年度の研究実績として、多重ゼータ値の調和積と相性の良い補間関数の多重メリン積分による表示が得られた。上述の近畿大学の中村弥生氏との共同研究により、ある種の多変数有理関数の系列の多重メリン積分として多重ゼータ値やその補間関数が表示されることが予想されていたが、慶應大の山本修司氏の着想により積分の収束性部分が証明され、定理として確立した。この結果については論文「Integral representation of interpolant of multiple harmonic sum」を中村氏と山本氏との 3 人共著論文として準備中である。また、上記の研究を「調和積側」とすると「シャッフル積側」とみなせる多重ポリログ関数の多重メリン積分に関する研究を、近畿大の石橋大生氏との共同研究として行った。多重ポリログ関数のメリン積分表示については結果が得られ、石橋氏との共著論文が、近畿大学理工学総合研究所紀要「Science and Technology」に掲載された。

2021 年度の研究実績として、近畿大学の中村氏らとの共同研究として論文「Generating function of multiple polylog of Hurwitz type」を執筆した。この研究は、Y. Ohno, D. Zagier による多重ポリログの母関数が満たす微分方程式の研究を基に、多重ポリログを Hurwitz 型多重ポリログへと拡張した結果である。保型形式の多重 L 値の研究として、関連する F. Brown の最近の研究結果に関するセミナーを開催し、周期間の関係式やアソシエーターの構成に関する研究討論を行った。

2022 年度の研究実績として、上記の論文「Generating function of multiple polylog of Hurwitz type」が専門誌 Canadian J. Math に受理され、出版された。また、近畿大の松田健太氏との共同研究として、代数体に付随する多重 Dedekind ゼータ値に関する結果を、近畿大学理工学総

合研究所紀要「Science and Technology」に投稿した。また、保型形式と多重ゼータ値を研究テーマとした若手を中心とした研究会を近畿大学にて企画開催した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 石橋大生・井原健太郎	4. 巻 33
2. 論文標題 多重フルヴィッツポリログの積分表示について	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 近畿大学理工学総合研究所紀要 (Science and Technology)	6. 最初と最後の頁 1-4
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ihara Kentaro, Kusunoki Yusuke, Nakamura Yayoi, Saeki Hitomi	4. 巻 -
2. 論文標題 Generating function of multiple polylog of Hurwitz type	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Canadian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008414X22000621	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 石橋大生・井原健太郎	4. 巻 32
2. 論文標題 多重ポリログ関数のメリン積分表示	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 近畿大学理工学総合研究所紀要 (Science and Technology)	6. 最初と最後の頁 1-4
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 井原健太郎・関谷大輔	4. 巻 31
2. 論文標題 秋山・谷川三角形の母関数	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 近畿大学理工学総合研究所紀要 (Science and Technology)	6. 最初と最後の頁 1-3
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 井原健太郎
2. 発表標題 New expression of multiple zeta values via multiple Mellin transform
3. 学会等名 名古屋ゼータ若手研究集会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 井原健太郎
2. 発表標題 Iterated integral of elliptic cusp forms
3. 学会等名 早稲田大学整数論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井原健太郎
2. 発表標題 ゼータ関数の多重化と整数論
3. 学会等名 近畿大学理工イノベーションフォーラム
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------