

令和 4 年 5 月 30 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03292

研究課題名(和文) ハンドル体結び目と拡大アレクサンダー不変量

研究課題名(英文) Handlebody-knots and augmented Alexander invariants

研究代表者

石井 敦 (Ishii, Atsushi)

筑波大学・数理解物質系・准教授

研究者番号：00531451

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：ハンドル体結び目とは3次元球面に埋め込まれたハンドル体のことです。種数1のハンドル体結び目は通常の結び目に対応しているため、ハンドル体結び目の概念は結び目の概念の自然な一般化になっています。本研究の研究成果は次にあげる通りです：ハンドル体結び目のMCQアレクサンダーイデアルを定義しました。カンドルアレクサンダーペアからMCQアレクサンダーペアを得る方法を提供しました。ここで、MCQアレクサンダーペアはMCQねじれアレクサンダーイデアルを定義するのに使われる写像の組のことです。

研究成果の学術的意義や社会的意義

結び目理論はひもという素朴なものを媒体に、空間の形やDNA、暗号理論など様々な分野と関わりを持っています。ハンドル体結び目理論は結び目理論の一分野で、空間に埋め込まれたハンドル体を研究対象にします。結び目は粒子の運動の軌跡と捉えることができますが、ハンドル体結び目はこれらの粒子に分裂・合体を許したものに对应します。二つのハンドル体結び目を判別するために不変量が必要になりますが、本研究ではMCQアレクサンダーイデアルと呼ばれる不変量を構築しました。

研究成果の概要(英文)：A handlebody-knot is a handlebody embedded in the 3-sphere. The notion of a handlebody-knot is a natural generalization of that of a knot, since a genus one handlebody-knot corresponds to a usual knot. The results of this study are as follows: We defined an MCQ twisted Alexander ideal of handlebody-knots. We present a method to obtain an MCQ Alexander pair from a quandle Alexander pair, where an MCQ Alexander pair is a pair of maps that is used to define an MCQ twisted Alexander ideal.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：結び目理論

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

#### (1) ハンドル体結び目

3次元球面に埋め込まれたハンドル体をハンドル体結び目と言い、複数のハンドル体を3次元球面に埋め込んだものをハンドル体絡み目と言います。種数1のハンドル体結び目は通常の結び目(円周の3次元球面への埋め込み)に対応するので、ハンドル体結び目理論は結び目理論の一般化と言えます。補空間の基本群が同型なハンドル体結び目を区別する不変量が待ち望まれていました。

#### (2) カンドルと多重共役カンドル

結び目の初等的な不変量に  $F \circ x$  彩色不変量があります。結び目のダイアグラムに対するライデマイスター変形を公理化して得られる代数であるカンドルを用いて、 $F \circ x$  彩色不変量はカンドル彩色不変量に一般化されます。特に、群に共役演算を与えるとカンドルになり、この場合のカンドル彩色不変量は群表現の個数に一致します。ハンドル体結び目のダイアグラムに対するライデマイスター変形を公理化すると、多重共役カンドルとよばれる部分的な積構造を持つカンドルが得られます。カンドルは結び目の完全不変量として知られていますが、多重共役カンドルがハンドル体結び目に対してどのくらい有効であるかは分かっていませんでした。

#### (3) 拡大アレクサンダー不変量

アレクサンダー多項式は結び目補空間の被覆空間のホモロジー群が持つ加群構造を用いて定義されます。この構造を結び目補空間の基本群から取り出すのに使われるのが  $F \circ x$  微分になります。この  $F \circ x$  微分はカンドルに対して拡張され、カンドル版の  $F \circ x$  微分を用いて結び目の拡大アレクサンダー不変量が定義されたところでした。また、結び目の拡大アレクサンダー不変量はねじれアレクサンダー不変量とカンドルコサイクル不変量を復元することも分かっています。

### 2. 研究の目的

ハンドル体結び目に対して拡大アレクサンダー不変量を構成し、ハンドル体結び目の性質を解明するのに役立てることが研究の目的でした。

#### (1) 多重共役カンドル版の拡大アレクサンダー不変量

カンドルは結び目のアーク彩色に関する普遍的な代数であり、多重共役カンドルはハンドル体結び目のアーク彩色に関する普遍的な代数です。カンドル版の  $F \circ x$  微分を用いて定義された結び目の拡大アレクサンダー不変量を、多重共役カンドル版の  $F \circ x$  微分を用いてハンドル体結び目に対しても構成することは研究の目的の一つでした。

#### (2) 多重共役カンドルのアレクサンダーペア

ハンドル体結び目の拡大アレクサンダー不変量を定義するのに用いられる多重共役カンドル版の  $F \circ x$  微分には多重共役カンドルのアレクサンダーペアが必要になります。多重共役カンドルのアレクサンダーペアは多重共役カンドルの線形拡大やアフィン拡大に対応して決まります。多重共役カンドルのアレクサンダーペアを探し、ハンドル体結び目の性質を明らかにすることは研究の目的の一つでした。

### 3. 研究の方法

#### (1) 多重共役カンドル版の拡大アレクサンダー不変量

アレクサンダー型の不変量は、群やカンドルの表示から群やカンドル版の  $F \circ x$  微分を用いて行列を求め、小行列式たちで生成されるイデアルや最大公約数によって定義されます。多重共役カンドル版の拡大アレクサンダー不変量を構成するために、まず多重共役カンドルの表示の定義を目指しました。また、多重共役カンドルの表示がいつ同型な多重共役カンドルを表すかを明らかにする必要もありました。

## (2) 多重共役カンドルのアレクサンダーペア

多重共役カンドルのアレクサンダーペアは多重共役カンドルの線形拡大やアフィン拡大に対応して決まるので、多重共役カンドル間の適切な全射を探すことを目指しました。また、多重共役カンドルのコサイクルがカンドルのコサイクルの多重化によって得られていたので、多重共役カンドルのアレクサンダーペアに対してもカンドルのアレクサンダーペアの多重化によって得る方法も目指しました。

## 4. 研究成果

### (1) 多重共役カンドルの表示

群やカンドルの場合には適切な正規部分群や同値関係で割るだけで表示の定義を得ることができましたが、多重共役カンドルの場合には同値関係で割っても多重共役カンドルが得られるとは限らず、擬多重共役カンドルの概念と擬多重共役カンドルから多重共役カンドルを得るための閉包操作を開発することで多重共役カンドルに対して表示の概念を定式化しました。

### (2) 多重共役カンドル版の拡大アレクサンダー不変量

研究期間中にアフィン拡大に対応したカンドル版の拡大アレクサンダー不変量が、線形拡大に対応したカンドル版の拡大アレクサンダー不変量とコサイクル不変量に分離されることが分かってきました。多重共役カンドル版の拡大アレクサンダー不変量に対しても同様のことが分かったので、線形拡大に対応した多重共役カンドル版の拡大アレクサンダー不変量の構成に集中し、多重共役カンドルねじれアレクサンダーイデアルの定義に成功しました。

### (3) 多重共役カンドルのアレクサンダーペア

多重共役カンドルを組織的に構成する方法としてカンドルのG族を用いる方法があります。カンドルのG族は群Gによる演算の族を与えたカンドルのことで、特に、任意のカンドルはカンドルのZ族の構造を持つので、カンドルのG族の例はたくさんあります。カンドルのZ族を用いて得られる多重共役カンドルのアレクサンダーペアを、もとのカンドルのアレクサンダーペアから構成する方法を確立しました。また、その構成方法が適用可能であるための十分条件も明らかにしました。このようにして得られた多重共役カンドルのアレクサンダーペアの中に、補空間が同型な基本群を持つハンドル体結び目を区別することのできるものを発見しました。系として、ハンドル体結び目の基本多重共役カンドルの同型類が補空間の基本群の同型類より真に強いことを示しました。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Atsushi Ishii, Shosaku Matsuzaki and Tomo Murao	4. 巻 29
2. 論文標題 A multiple group rack and oriented spatial surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 2050046-1 - 20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216520500467	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Atsushi Ishii, Masahide Iwakiri, Seiichi Kamada, Jieon Kim, Shosaku Matsuzaki, Kanako Oshiro	4. 巻 27
2. 論文標題 Biquandle (co)homology and handlebody-links	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1843011-1 - 33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216518430113	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ishii Atsushi, Iwakiri Masahide, Kamada Seiichi, Kim Jieon, Matsuzaki Shosaku, Oshiro Kanako	4. 巻 301
2. 論文標題 Cocycles of G-Alexander biquandles and G-Alexander multiple conjugation biquandles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107512 ~ 107512
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107512	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ishii Atsushi, Oshiro Kanako	4. 巻 301
2. 論文標題 Row relations of twisted Alexander matrices and shadow quandle 2-cocycles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107513 ~ 107513
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107513	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 石井敦
2. 発表標題 On a quandle derivative
3. 学会等名 カンドルと対称空間（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Atsushi Ishii
2. 発表標題 Generalized quandle cocycle invariants and shadow quandle cocycle invariants
3. 学会等名 The Third Pan Pacific International Conference on Topology and Applications（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石井敦
2. 発表標題 Fox derivatives for quandles
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石井敦
2. 発表標題 On generalized quandle cocycle invariants
3. 学会等名 北陸結び目セミナー2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石井敦
2. 発表標題 Twisted derivatives with Alexander pairs for quandles
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー-2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石井敦
2. 発表標題 Special Session on Algebraic and Combinatorial Structures in Knot Theory
3. 学会等名 f-derivatives for quandles
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石井敦
2. 発表標題 Fox derivatives for quandles
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------