様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　６ 月　３ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2020
課題番号：１８Ｋ０３２９４

研究課題名（和文）高階リー群の剛性 -- その統一的理解を目指して

研究課題名（英文）Rigidity of higher dimensional Lie groups -- Toward comprehensive understanding

研究代表者
金井　雅彦（Kanai，Masahiko）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：７０１８３０３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：階数が２以上の非コンパクト半単純リー群の格子は種々の剛性を示す．しかし，それらの証明においては，非コンパクト単純リー群の分類を用いた場合分けを行うことがしばしばであった．本研究は，その種の定理に対し統一的な証明を与えることを目的とした．とくに松島の消滅定理の別証明を得た．葉層構造の接方向には調和積分論を，法方向に対してはエルゴード理論を適用するのが，証明の基本方針である．
その他にトンプソン群 F に関する考察を行った．とくに，トンプソン群の自己同型群に関する Brin 達との結果と Mostow の剛性定理の類似性を認識するとともに，F が作用する無限次元空間を発見した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
最終年度にコロナ禍に襲われたこともあり，本研究計画は完成にはほど遠いと言わざるをえない．しかし，すでに部分的な結果は得られている．それらを発展させ，さらに新たな考察を積み上げれば，この分野の専門家たちから十分に高い評価を得られるのではないかと期待している．

研究成果の概要（英文）：It is known that semi-simple Lie groups of real-rank greater than or equal to 2 exhibit rigidity phenomena. The proofs of such results are often done by appealing to a classification of such Lie groups (or their Lie algebras). The present research aims at unifying those theorems. I gave a new proof of Matsushima's vanishing based on such a scenario. A basic strategy is -- For a certain foliated space, apply the theory of harmonic integration in the direction tangent to the foliation, and ergodic theory in the transverse direction.
We made investigations on the Thompson group F, as well. In particular, I discovered a deep similarity between a result on the automorphism group of F done by Brin et al., and a new infinite-dimensional space on which F acts.

研究分野：Geometry

キーワード：剛性　高階リー群　トンプソン群

１．研究開始当初の背景
実階数が２以上の非コンパクト半単純リー群の格子は種々の剛性を示すことが知られている．しか し，松島の消滅定理を典型とするように，それらの証明は非コンパクト単純リー群の分類定理を用いた場合分けにより行われることがしばしばであった．

２．研究の目的
本研究は，その種の定理に対し 統一的な証明を与えることにより，問題に対するより深い理解を獲得することを目的とする．さらには， そこで得た知見をもとに新たな剛性定理，とくに群作用に対するそれを得ることを目指す．

３．研究の方法
与えられた設定から，葉層化多様体を構成する．（例えば，リー群 G=SL(n,R) (n>2) とその（一様）格子 Γ に対し，まずコンパクト多様体 V=Γ\G をとる．そして，正の対角成分を持つ対角行列からなる極大連結アーベル部分群 A の V への右からの局所自由な作用の軌道からなる葉層構造 F をとる．）このとき基本方針は以下の通りである：葉層構造の接方向には調和積分論を，法方向に対してはエルゴード理論を適用する．

４．研究成果
「研究の方法」欄で述べた方法により，松島の消滅定理自体に対する別証明が可能であることは，すでに課題申請時から把握していた．その別証明の概略は，まず Bekka 達によるユニタリ表現論の結果を援用することにより，ある条件を満たす接調和関数の存在を示し，次いでそれが自明な関数であることをエルゴード理論を使って証明するというものであった．そこで，初年度はその非線形化を試みた．その過程を通じ，（必ずしも本研究計画とは直接関係のない）新たな知見を少なからず得ることができた．しかし，残念ながら本研究計画に直接関わる納得のいく結果は得られなかった．

　ところで，本研究計画は本来 Margulis の超剛性定理を典型とする高階リー群の格子の剛性に関わるものであった．しかし，２年目から研究方向を変更した．Margulis の超剛性定理に先行して確立されたリー群の剛性定理のひとつに Mostow のそれがある．とくに，n 次元実双曲空間の等長変換群の一様 格子は n が３以上のとき剛性を有する．一方，n=2 の場合には剛性現象は発現せず，逆に柔軟性とでも呼ぶべきものが観察される．その柔軟性を極めて精緻な様式で記述したのがタイヒミューラー空間論である．この類似がトンプソン群というまったく異種の離散群に対しても観察されることを認識した．トンプソン群は可換部分群を豊潤に有する．そこで，本研究課題２年目は，トンプソン群に焦点をあてることにした．ところで，トンプソン群には F, T, V と言う記号で表される合計３種が存在する．いま，問題にしているのは，F ないし

T である．これらの離散群の定義においては，Z[1/2] が登場する．そこに現れる 2 を 2 以上の整数 m で置き換えることにより，あらたな離散群が得られる．それらを F(m), T(m) と書くことにしよう．McClearly-Rubin と Brin の結果を合わせると，F=F(2), T=T(2) に対しては Mostow の剛性定理に相当する結果が得られる．一方，m が 3 以上の場合には，柔軟性が発現することが Brin-Guzman により指摘されている．一般化トンプソン群 F(m), T(m) の剛性 — 柔軟性を Mostow の剛性定理やタイヒミューラー空間論の類似性を強く意識しながら，新たな理解を目指し，部分的ではあるが成果を上げたのが，本研究計画の 2 年目であった．また，トンプソン群 F が作用する無限次元空間を発見したのも 2 年目が始まったころであった．本研究計画からはさらに外れるかもしれないが，この発見は将来極めて大きな成果をもたらす可能性があると感じている．

本研究計画 3 年目が始まる少々前から，新型コロナの全世界的蔓延が深刻な問題となった．所属大学においてもその対策の一環として I 年間を通じて講義がオンラインで配信されることになった．週の半分はその準備で費やされることになった．さらに，詳細を言うことはできないが，責任者として関与した業務における新型コロナ対策に残りのすべての時間を注入せざるを得ない状況が I 年間続いた．そのため，最終年度である 3 年目における研究成果はゼロであった．研究費支給は終了したが，この研究課題自体に対しては，今後も取り組み続けるつもりである．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Rigidity School, 2018.	2018年～2018年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関