

令和 5 年 5 月 12 日現在

機関番号：37112

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03314

研究課題名(和文) フィンスラー多様体の凸性と測地線の大域的挙動

研究課題名(英文) Convexity and global behavior of geodesics on Finsler manifolds

研究代表者

塩濱 勝博 (Shiohama, Katshiro)

福岡工業大学・付置研究所・研究員

研究者番号：20016059

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)： n 次元($n>1$)完備フィンスラー多様体上の点 p に於ける指数写像は切断跡の内部で自然に定義出来る。
しかし p の切断跡を超えて曲線が延長されるとき延長された測地線が p に於ける指数写像の逆写像によってどのように接空間にリフトされるかは不明であった。
 p の切断跡を交差する曲線に対して p に於ける指数写像によって接空間の中にリフトされる可能性を詳しく調べた。その結果 p の接切断跡が多様体の展開として議論出来る事実を発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

完備フィンスラー多様体の一点 p に於ける指数写像が p の切断跡を延長して議論する事によって切断跡の微分可能性について議論出来る様になった点は大きな意義がある。フィンスラー多様体の距離関数が非対称である事に鑑みて
この議論は極めて重要であると考えられる。

研究成果の概要(英文)：Let (M, F) be a complete Finsler n -manifold, $n>1$. We discuss the preimage of a curve c on M under the exponential map at p . If c does not meet the cut locus of p , then it is clearly lifted in the tangent space at p via the inverse of the exponential map. However it is not possible if c meets the cut locus of p . We discuss a curve c intersecting the cut locus of p , where it is conjugate to p . We then develop an idea to extend the exponential map at p beyond the cut locus to p .

研究分野：Finsler geometry

キーワード：Finsler metric non-symmetric distance geodesic cut locus conjugate locus Christoffel symbols

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

完備フィンスラー多様体の大域的研究は、フィンスラー計量から導入される距離関数の非対称性によって生じることは既に知られていて、リーマン幾何学との本質的相違があり、その違いは切断跡や共役跡の性質にも表れると予想されている。しかし、その詳しい関係性は未知である。リーマン幾何学における大域的研究には、切断跡や共役跡の性質が深くかかわっているが、フィンスラー多様体では、これらの詳しい諸性質も未知の部分が多く、これらの研究を通し、完備フィンスラー多様体の大域的研究を進めることが期待されていた。

2. 研究の目的

完備フィンスラー多様体の大域的研究を進めることが目的であるが、具体的には、切断跡や共役跡のリーマン幾何学と異なる性質の詳しい研究と、単射半径を実現する最小切断点と共役点における測地線の挙動に関する Berger-Omori の定理のフィンスラー版をリーマンの場合と全く異なる独自の方法によって証明したい。共役点でない最小点に関する Klingenberg の結果は、リーマン幾何と同様に成立しないので、Rauch 予想との関連において Blaschke フィンスラー多様体の位相を調べたい。また、Blaschke Berwaldt 多様体についても研究を進める。さらに前年度までの科研(C)で我々は凸関数を許容するフィンスラー多様体の諸構造の研究を発展的にすすめ、本研究ではアフィン関数等の凸性に関連する関数を許容するフィンスラー多様体を調べる。

3. 研究の方法

助成金の殆どは研究会参加の為に旅費である。我々の研究は分担者各自がそれぞれの課題に向けて独自に研究を進める。3年間に亘る基盤研究(C)「フィンスラー多様体の凸性」の発展的研究である本研究の主な目的を推進するために毎年定期的に国内各地で開かれる研究集会に出席して各地の研究者と討論や情報交換をする。参加する研究集会は日本数学会主催の秋季総合分科会、年会及び日本数学会九州支部会主催の秋季、春季研究集会で、これらは九州域内の各県にある国立大学が輪番で主催する。

4. 研究成果

(1) 平成30年度は第53回フィンスラー幾何学研究会で

塩濱勝博が「Affine Functions on Complete Finsler Manifolds」で講演した。(概要) フィンスラー多様体が測地的に完備であるとは、各点における指数写像が接ベクトル空間全体で定義されていることを意味するが、講演では非自明なアフィン関数をもつ完備なフィンスラー多様体の存在を仮定して、Busemann 関数について性質から、 α をフィンスラー多様体 (M, F) 上の非自明なアフィン関数とし、かつある条件を満たすリーマン計量 g から、リーマン多様体 (M, g) がリーマン積 $N \times R$ に同型であることを示した。

永野哲也が「On transformations of linear parallel displacement」で講演した。(概要) フィンスラー空間の曲線に沿う線形平行移動は、一般に、対称ではない。平行移動したベクトルを元の位置まで線形平行移動でもどしても元に戻らない。まず、測地線上で内積を用いた対称的な線形平行移動を研究します。その後、測地線が厳密に可逆であるための条件をいくつか得ます。次に、可逆な測地線が存在する近傍領域で、初期ベクトルの内積と戻ってきたベクトルの内積の比が1である場合の線形平行移動の対称性を論じた。これらの議論は今後議論の対象になる測地線の分岐現象に大きくかかわる事柄である。

印南信弘が「Geodesics and geodesic circles in a Finsler surface with genus 1」で、それぞれ講演した。(概要) M を種数が1以上の向き付け可能な有限連結で測地的に凸な2次元 Finsler 多様体とする。一部の閉測地線は可逆であると仮定する。ただし、2次元多様体 M は完備で境界がない必要はない。任意の数 $R > 0$ および M の任意の点 p, q に対して、次の性質を持つ正数 R が存在することを示し、さらに $t > R$ なる任意の t に対して、中心 p で半径 t を持つ測地円は、半径 R で中心が q の測地円と交わることを示した。

(2) 令和元年度は、第54回フィンスラー幾何学研究会で

印南信弘が「Developing a Finsler manifold into the tangent space under the inverse exponential map」で講演した。(概要) (M, F) を前方完備な Finsler 多様体とし、 $p \in M$ とし、 p の共役切断点に向かう曲線が p の切断領域を横断せずに接近する場合、 p における指数写像の逆像が接ベクトル空間 $T_p M$ でどのように振る舞うかを考える。曲線とその逆像の微分可能性の関係の順序を考慮し、応用として、 M の開領域を $p \in M$ の接線切断領域の展開視点と

見なすことができる。結果、もし $C(p)$ が $q \in C(p)$ において微分可能であるならば、 $Ap(q)$ は TqM における $TqC(p)$ の補集合を底面とする錐を含んでいることがわかり、特に、 p から q への最小測地線 $T(p, q)$ の集合 S は、次元 $\dim V = n - \dim TqC(p)$ の球を含んでいことが明らかになった。

また共著論文（印南、糸川、永野、塩濱）「Blaschke Finsler manifolds and actions of projective Randers changes on cut loci」を Trans. Amer. Math. Soc. から出版した。（概要）完備フィンスラー多様体における切断跡および共役極を研究した。研究は、それらの共通部分に焦点を当てている。Klingenberg の補題のフィンスラー版を提案し、そしてブラシュケ・フィンスラー多様体における切断跡および共役跡の構造を決定した。いくつかの具体例を得るために、射影ランダース変換の下で切断跡と共役跡がどのように変化するかを研究した。切断跡の不変性と射影ランダース変換における閉じた 1 形式の厳密性との関係を見ました。

さらに、共著論文（永野、印南、糸川、塩濱）を Bult. Inst. Polit. din Iasi Sectia Math. Mec. Teoretica Fiz. から出版した。（概要）フィンスラー空間の一般的な線形平行移動の概念を用いて、可逆測地線と LPD（線形平行移動対称）曲線の存在条件を研究した。特に、それらの積分可能条件を調べることによって、それらの局所的な存在条件を得た。さらに、測地線の分岐についても詳しく調べられ、フィンスラー空間の測地線には一般に 3 通りの分岐現象が存在することがわかった。ただし、可逆性は分岐の特別な場合（分岐しない）とする。

（3）令和 2 年度は、

共著論文（印南、糸川、永野、塩濱）「Affine functions and Busemann functions on complete Finsler manifolds」を Proc. of American Math. Soc. から出版した。（概略）測地的に完備なフィンスラー多様体におけるアフィン関数と Busemann 関数の関係を明確にした。応用として、フィンスラー多様体上のすべてのアフィン関数からなるベクトル空間の次元を用いて、ミンコフスキー空間の特性付けを与えた。

（4）令和 3 年度は、

共著論文（印南、糸川、永野、塩濱）「Axial straight lines in the covering surfaces of a Finsler surface」を Nihonkai Math. J. から出版した。（概要）曲面上の測地線の研究では、球面、トーラス、その他の閉曲面、非コンパクト曲面について、対象と方法が異なる。我々は、2-トーラス上の測地線を研究するために使用される方法を、種数が 2 以上の曲面にも適用する。 S を境界を持つトーラスとし、それが向き付け可能な測地的に完備フィンスラー曲面 M に埋め込まれているとする。 S 上の距離 S を以下のように定義する。 $S(p, q)$ は、 S 上の同じ端点 $p, q \in S$ を持つ曲線にホモトピーな M 上の曲線の最小長さである。これらの測地線は S に関して最小であり、しかし M 上では最小ではない。我々はこの距離 S を使用して、 S 内の曲線にホモトピーな M 上の測地線を研究した。

（5）令和 4 年度は、

日本数学会秋季総合分科会（北海道大学）で永野哲也が「フィンスラー空間の非可逆測地線の乖離を測る量」で講演した。（概要）フィンスラー空間の測地線は向きに依存する。したがって、一般に、2 点を結ぶ測地線はその像が異なる。特に、一致する場合を、その測地線は“可逆である”という。測地線は、通過点 x と向き y が指定されると局所的に必ず存在する（リーマン空間と同様）。参考文献「Notes on reversibility and branching of geodesics in Finsler spaces」で、1 点の前後での測地線の挙動（図 1）が詳しく論じられたが、本講演では、分岐の程度を計量を用い数量的に評価することについて論じた。

また、共著論文（印南、糸川、永野、塩濱）「Geodesic families characterizing flat metrics on a cylinder and a plane」を Mathematica Scandinavica から出版した。（概要）非コンパクトな完備な曲面が、すべての主閉測地線が同じ長さである場合、パイプシリンダーに同型の領域を含むことを証明した。応用として、全てのユニバーサル被覆面が発散性を満たす曲面のクラスで、平坦なシリンダーが共役剛性を持つことを示した。また、ユークリッド平面の測地的共役における発散性についても研究した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 印南信広-糸川銚一-永野哲也-塩濱勝博	4. 巻 32
2. 論文標題 Axial straight lines in the covering surface of a Finsler surface	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nihonkai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 15--24
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 N. Innami--Y. Itokawa--T. Nagano--K. Shiohama	4. 巻 308
2. 論文標題 The Azimuthal Euidistant Projection for a Finsler Manifold by the Exponential Map	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 73--102
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 N. Innami--Y. Itokawa--T. Nagano--K. Shiohama	4. 巻 149
2. 論文標題 Affine Functions and Busemann Functions on Complete Finsler manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1723--1732
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 T. Nagano-N. Innami-Y. Itokawa-K. Shiohama	4. 巻 65
2. 論文標題 Notes on Reversibility and Branching of Geodesics in Finsler Spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bull. Inst. Politeh. Din Iasi (Romania)	6. 最初と最後の頁 9--28
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 N. Innami-Y. Itokawa-T. Nagano-K. Shiohama	4. 巻 371
2. 論文標題 Blaschke Finsler Manifolds and actions of Projective Randers Changes on Cut Loci	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Transactions of American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 7433--7450
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Innami, Y. Itokawa, T. Nagano and K. Shiohama	4. 巻 Vol 371, No. 10
2. 論文標題 Blaschke Finsler Manifolds and Actions of Projective Randers Changes on Cut Loci	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 7433--7450
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件 (うち招待講演 1件/うち国際学会 2件)

1. 発表者名 永野哲也
2. 発表標題 Approach to Cryptography from Differential Geometry with Example
3. 学会等名 The 13-th International Conference SecITC 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 塩濱勝博
2. 発表標題 Affine Functions on Complete Finsler Manifolds
3. 学会等名 第54回フィンスラー幾何学シンポジウム (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K.Shiohama
2. 発表標題 Affine Functions on complete Finsler manifolds
3. 学会等名 The 53-rd. International Symposium on Finsler Geometry
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計3件

1. 著者名 T.Nagano--H.Anada	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Springer Nature, Switaerland	5. 総ページ数 302
3. 書名 Innovation Security Solutions for Information Technology and Communications	

1. 著者名 S.G.Dani and A.Papadopoulos (Editors)	4. 発行年 2019年
2. 出版社 Springer Nature Switzerland AG 2019	5. 総ページ数 750
3. 書名 Geometry in History	

1. 著者名 K.Shiohama and B.Tiwari	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Springer-Verlag, arXiv:1811552v1	5. 総ページ数 -
3. 書名 The Global Study of Riemannian-Finsler Geometry --to the memory of Marcel Berger--	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	永野 哲也 (NAGANO Tetsuya) (00259699)	長崎県立大学・情報システム学部・教授 (27301)	
研究分担者	糸川 銚 (Itokawa Yoe) (90223205)	福岡工業大学・情報工学部・教授 (37112)	
研究分担者	印南 信宏 (Innam Nobuhiro) (20160145)	新潟大学・自然科学系・教授 (13101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関