

令和 6 年 5 月 17 日現在

機関番号：11101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03351

研究課題名（和文）膨張宇宙モデルにおけるスケール因子が非線形波動に及ぼす影響について

研究課題名（英文）The effect of scale factor on nonlinear waves in the expanding universe model

研究代表者

津田谷 公利 (Tsutaya, Kimitoshi)

弘前大学・理工学研究科・教授

研究者番号：60250411

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：標準宇宙モデルとして知られているフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー時空における非線形波動について考察する。平坦な時空であるミンコフスキー空間の場合での既知の結果と比較することによって、宇宙膨張速度を表すスケール因子が非線形波動に及ぼす影響を解明することが本研究の目的である。膨張宇宙モデルを減速、等速、加速の場合に分け、非線形波動方程式の解の時間大域的な存在条件や爆発条件、および爆発解の存在時間評価を求めた。その結果、ミンコフスキー空間の場合と比べて解の爆発が起こりやすいこと、さらに爆発解の存在時間も短くなることが明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

標準宇宙モデルとして重要なフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー時空を背景時空とした非線形波動方程式を解析した結果、このような膨張宇宙モデルでは、平坦なミンコフスキー時空と比べ、非線形波動の特異性の発生が起こりやすいことを数学的解析により明らかにした。つまり、膨張宇宙モデルにおいては膨張速度が波動の挙動に大きな影響を及ぼしているということがわかった。今後の非線形波動方程式研究を進めるための指針を提供した。

研究成果の概要（英文）：We study nonlinear waves in the Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker spacetime, known as the standard cosmological model. The aim of this study is to elucidate the effect of the scale factor, representing the expansion rate of the universe, on nonlinear waves by comparing with known results in flat spacetime, such as the Minkowski spacetime. We classify the expanding universe model into decelerating, constant, and accelerating cases, and determine the global existence conditions, blow-up conditions, and estimates for the lifespan of blow-up solutions of the nonlinear wave equation. As a result, it is revealed that blow-up of solutions is more likely to occur compared to the Minkowski spacetime case, and furthermore, the lifespan of blow-up solutions is shorter.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：波動方程式 時間大域解存在 爆発解 解の存在時間 スケール因子 膨張宇宙

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

素粒子論や量子電磁力学などに登場する非線形波動方程式の研究は 1980 年頃から急速に進んだ。ミンコフスキー空間においては多数の研究がなされてきたが、一方、近年宇宙モデルを背景時空とした研究が注目されつつある。標準宇宙モデルとして重要な宇宙空間の一つにフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー時空がある。この計量は一般相対性理論に登場するアインシュタイン方程式の厳密解の一つで、一様等方的な物質分布のもとで膨張または収縮する宇宙モデルを表す。この時空計量はスケール因子と空間曲率の 2 つの物理量だけで特徴付けられる。スケール因子は宇宙膨張の時間変化を表し、時間のみ関数である。

質量項のついた非線形波動方程式、すなわち非線形クライン-ゴルドン方程式に関しては、フリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー時空の特別な場合であるド・ジッター時空において時間大域解存在の研究が行われていた。しかし、質量項のない場合の研究では、線形方程式の解の表現公式、ルベグ空間での基本評価、有界な台をもった初期値に対する解の時間減衰評価以外何も知られていない状態であった。時間大域解の存在や解の特異性を解明する研究が期待されていた。

2. 研究の目的

標準宇宙モデルとして知られているフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー時空における非線形波動について、空間曲率がゼロの場合を考察する。平坦な時空であるミンコフスキー空間の場合での既知の結果と比較することによって、宇宙膨張速度を表すスケール因子が非線形波動に及ぼす影響を解明することが本研究の目的である。フリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー時空における波動方程式は時間変数を係数にもつ消散型方程式である。方程式の解の時間大域的な存在や爆発条件、および爆発解の存在時間評価を求めることにより、スケール因子がどのように波動に関係しているのかを数学的解析により突き止めていく。数学的な面では、時間変数係数の消散型波動方程式の時間大域解存在、解の爆発を示す新しい手法の開発を目標とする。時間大域解存在と解の爆発を分ける非線形性の条件、すなわち臨界条件について考えれば、ミンコフスキー空間における非線形熱方程式、非線形波動方程式で登場する藤田指数やシュトラウス指数、グラッシー指数に相当する指数の出現も予想されるため、臨界条件の明確化も目指す。

3. 研究の方法

本研究では、まずフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー時空における波動方程式の滑らかな解の伝播速度を考え、台が有界である初期値をもった解の台の時間変化を明らかにする必要がある。台の広がり方が解の時間大域解存在や解の爆発条件を決定する鍵となるからである。

次に方程式の解のエネルギー評価を求め、ソボレフの不等式などを用いて時間局所解を構成する。同時に時間大域解存在の条件を明らかにしていくことを目指した。一方で解の有限時間での爆発についても考察する必要がある。これまで用いられてきたテスト関数の改良版、あるいは特殊関数で表されるテスト関数を用いた方法で解の爆発を示すことを試みた。他の道具は、解の空間変数に関する積分をとることによって、方程式を時間変数についての微分不等式に帰着させる方法である。これは加藤の不等式と呼ばれる。方程式に合ったタイプを構築し、フリッツ・ジョーンによる逐次近似法を用いた加藤の不等式の一般化を目標とした。これらの方法が適用できれば、爆発条件だけでなく、爆発解の存在時間評価も可能となる。

本研究課題は、消散型波動方程式研究に精通している研究協力者とともに取り組んだ。

4. 研究成果

フリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー時空における波動方程式の滑らかな解の伝播速度については、時空のスケール因子が時間変数のべき乗タイプのものと指数関数タイプのものに分けて考察した。台が有界である初期値をもった解の台が時間とともにどのように変化するかを明らかにして伝播速度が有限であることを証明した。さらに、スケール因子の時間

積分を用いることによってこの場合分けが不要となり、解の台の広がり方を一般化させることができた。

有限時間における解の爆発については、まず非線形項が未知関数の冪乗であるタイプから取り組み、最初に減速膨張の場合を考えた。その結果、解の時間大域的存在と爆発を分ける臨界条件を割り出した。これはシュトラウス指数の一般化に当たり、波動型と言える。劣臨界条件のもとで解の爆発および解の存在時間の評価を示すことに成功した。しかし、この爆発条件は、方程式の消散項係数が小さい場合、すなわち波動型に近い場合良い結果であるが、消散項の係数が大きい場合は必ずしもそうではないことがその後判明した。この場合は方程式が熱方程式に近いことを意味する。そこで、いわゆる藤田型指数を割り出し、劣臨界条件のもとで解の爆発および解の存在時間の評価を示すことに成功した。これにより解の爆発条件を拡張することができた。得られた結論は、解の存在時間の評価が三つのタイプに分けられるということである。これに伴って爆発条件の領域も三つに分かれ、三番目の臨界条件が登場した。さらに、方程式が波動型、熱方程式型、どちらの場合においても劣臨界条件のもとで解の爆発および解の存在時間の評価を示すことに成功した。

次に等速膨張あるいは加速膨張する場合について研究を行い、解の爆発および爆発解の存在時間の評価を示した。1より大きい任意の冪乗で解の爆発が起こるという結果である。これは任意の小さい初期値に対して時間大域解を期待することは不可能であることを意味する。さらに、加速膨張の特別な場合であるドジッター時空についても研究した。未知関数の冪乗タイプ、未知関数の空間変数に関する偏導関数の冪乗タイプの両方で解の爆発条件および爆発解の存在時間の評価を導き出すことができた。ドジッター時空での波動方程式の時間大域解の存在問題はこれまで未解決であった。解の爆発結果を初めて示すことができ、国内外にインパクトを与えた。

未知関数の偏導関数の冪乗タイプである方程式についても考察した。その結果、減速膨張、等速膨張、加速膨張に対して、いずれも解の爆発条件および爆発解の存在時間の評価を得ることができた。非線形項の偏導関数が時間変数についての場合と空間変数についての場合とで比較してみると、解の爆発条件および爆発解の存在時間の評価が異なり、興味深い結果が得られた。偏導関数が時間変数についての場合と空間変数についての場合では、解の爆発条件および解の存在時間の評価が異なることは予想外であった。特に、非線形項が時間変数についての偏導関数である場合の爆発臨界条件は、ミンコフスキー空間で登場するグラッシー指数の一般化に当たり、これは特筆すべき点である。

その後、これまでに得られた爆発解の存在時間の評価は場合によっては改良できることがわかった。非線形項が未知関数の冪乗であるタイプあるいは未知関数の空間変数に関する偏導関数の冪乗タイプの波動方程式について、等速膨張あるいは加速膨張に該当する場合、消散係数が1より小さいならば、爆発解の存在時間が以前の結果より短くなることを証明した。

未知関数の時間に関する偏導関数の冪乗タイプについては、新たに見つかった臨界条件のもとでは解の爆発が未解決であった。この問題にも取り組んだ結果、解の爆発を示し、爆発解の存在時間の評価を求めることができた。

本研究の最終年度では、加速膨張するドジッター時空を一般化した宇宙モデルの場合を含むような、係数が時間変数に依存するラプラス項に拡張した波動方程式に取り組んだ。まず消散効果が消えない場合において、爆発解の存在時間についての評価を一般化させることができた。また、時間が経つにつれて消散効果がなくなっていく場合の波動方程式についても解の爆発条件および爆発解の存在時間の評価を求めることができた。時間大域解存在については、ある非線形項に対して、エネルギー法を用いて示すことができた。この時間大域解存在条件を爆発条件と照らし合わせると、これまでに得られた爆発条件の一部は最良であることが明らかになった。

全体を通して振り返ると、解の有限時間での爆発が起こる条件を求めた結果、波動方程式型、熱方程式型と見なせる臨界指数の他、ミンコフスキー空間では見られない2つの新たな臨界指数が見つかった。これに伴い、解の存在時間の評価は様々なタイプに分かれた。ミンコフスキー空間の場合と比べて解の爆発が起こりやすいこと、滑らかな爆発解の存在時間も短くなることが判明した。今後は一般化された方程式の研究、証明方法の統一化が見込まれる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Tsutaya Kimitoshi, Wakasugi Yuta	4. 巻 2021:94
2. 論文標題 On Glassey's conjecture for semilinear wave equations in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetime	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Boundary Value Problems	6. 最初と最後の頁 1~30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1186/s13661-021-01571-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Tsutaya Kimitoshi, Wakasugi Yuta	4. 巻 34
2. 論文標題 Blow-up of solutions of semilinear wave equations in accelerated expanding Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetime	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Reviews in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 2250003-1~16
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129055X22500039	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tsutaya Kimitoshi, Wakasugi Yuta	4. 巻 (2022)3:6
2. 論文標題 Blow up of solutions of semilinear wave equations related to nonlinear waves in de Sitter spacetime	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 1~10
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-021-00145-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tsutaya Kimitoshi, Wakasugi Yuta	4. 巻 61
2. 論文標題 Blow up of solutions of semilinear wave equations in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetime	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 091503~091503
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5139301	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tsutaya Kimitoshi, Wakasugi Yuta	4. 巻 500
2. 論文標題 On heatlike lifespan of solutions of semilinear wave equations in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetime	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 125133 ~ 125133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2021.125133	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 津田谷公利
2. 発表標題 On Glassey's conjecture for nonlinear wave equations in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetime
3. 学会等名 東北大学応用数理解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 津田谷公利, 若杉勇太
2. 発表標題 Blow up of solutions of semilinear wave equations with time-dependent damping
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 津田谷公利, 若杉勇太
2. 発表標題 On Glassey's conjecture for semilinear wave equations in FLRW spacetime
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 津田谷公利, 若杉勇太
2. 発表標題 Blow up of solutions of space derivative nonlinear wave equations in FLRW spacetime
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 津田谷公利, 若杉勇太
2. 発表標題 Blow up of solutions of semilinear wave equations in de Sitter spacetime
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 津田谷公利, 若杉勇太
2. 発表標題 On heatlike lifespan of solutions of semilinear wave equations in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetime
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 津田谷公利, 若杉勇太
2. 発表標題 Blow up of solutions of semilinear wave equations related to nonlinear waves in accelerated expanding FLRW spacetime
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 津田谷 公利
2. 発表標題 Blow up of solutions of semilinear wave equations with scale-invariant damping relevant to nonlinear waves in FLRW spacetime
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 津田谷 公利
2. 発表標題 Blow up of solutions of semilinear wave equations with scale-invariant damping relevant to nonlinear waves in FLRW spacetime
3. 学会等名 北海道大学偏微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 津田谷 公利
2. 発表標題 Blow up of solutions of semilinear wave equations in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker spacetime
3. 学会等名 研究集会「第17 回非線型の諸問題」（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 津田谷 公利
2. 発表標題 Blow up of solutions of semilinear wave equations with time-dependent propagation speed and damping
3. 学会等名 The 25th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	若杉 勇太 (Wakasugi Yuta)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------