

令和 4 年 5 月 24 日現在

機関番号：12613

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2021

課題番号：18K03357

研究課題名(和文)非双曲型吸引領域の構造と分岐：理論と数値計算の観点から

研究課題名(英文)On the structure and the bifurcation of non-hyperbolic attracting regions:
theory and numerics

研究代表者

篠原 克寿 (SHINOHARA, Katsutoshi)

一橋大学・大学院経営管理研究科・准教授

研究者番号：50740429

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：非双曲型力学系と呼ばれる微分力学系の構造と分岐理論について、特に吸引型領域と呼ばれる種類のものに関する研究を理論的・数値解析的両方の観点から実施した。非双曲型力学系が非常に複雑な分岐現象を示す理論的結果(周期軌道の超指数関数的増加に関する研究と体積双曲性と野生性に関する研究)と、非双曲型力学系の重要な発生機序であるブレンダーと呼ばれる構造を数値解析的手法により研究する方法論の確立を行った。研究成果は四本の論文として出版された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

微分力学系の知見はそれ自体が離散数理モデルや微分方程式の定性的理解の基礎となるものである。従って、本研究の結果は数理モデルを用いる現代の諸科学、ひいてはこれに立脚する現代社会に盤石な基礎を与えるものであると言える。本研究で扱った非双曲型力学系と呼ばれる種類の力学系は理論的に未知の部分が多い対象であり、今回の研究を通じて得られた理論的・数値解析の結果は今後様々な分野への知見を提供し、様々な波及効果を生むことが期待できる。

研究成果の概要(英文)：The structure and bifurcation theory of differential dynamical systems called non-hyperbolic dynamical systems, especially those of the type called absorbing domains, are studied from both theoretical and numerical viewpoints. Theoretical results showing that non-hyperbolic dynamical systems exhibit very complicated bifurcation phenomena (related to the super-exponential increase of periodic orbits and volume hyperbolicity and wildness) are obtained, and a methodology for the investigation of the structure called a blender, which is an important mechanism of the birth of non-hyperbolic dynamical systems, by using numerical analysis methods is proposed. The research results were published in four papers.

研究分野：微分力学系

キーワード：非双曲型力学系 野生的力学系 ヘテロ次元サイクル ホモクリニック接触

1. 研究開始当初の背景

微分力学系とは微分多様体の可微分写像の反復合成によって得られる軌道空間の構造を調べ、写像の摂動による軌道空間の変化(分岐)を理解することを目指す数学の一分野である。これまで申請者は非双曲型力学系の構造論、分岐理論およびその可視化に関する研究に携わってきた。過去の研究により非双曲型力学系の一般論が徐々に形成されつつあるが、得られた結果が(吸引領域内にあるとは限らない)鎖帰集集合に関するものであること、およびその具体例が人工的なものが多かった。

微分力学系の重要な研究対象のひとつに吸引領域がある。ある空でない開集合が吸引領域であるとは、その像の閉包がもとの開集合に含まれることを指す。ある写像が吸引領域を持つ場合、この領域の任意の点の前方軌道はその領域にとどまることになり、力学系の構造の研究を局所化することが可能となる。これらの性質から、吸引領域について非双曲型力学系の研究を展開することが望まれる。

また、一般論として、これまでの研究では非双曲型力学系の解析を低い正則性の位相のもとで行うか、あるいは極端に数学的に都合の良い状況で議論を精密化することにより一様双曲性の議論を再展開することによって結果が得られてきた。しかしながら、純粋数学としての力学系の成果を非線形科学をはじめとした諸科学に還流するためにはより一般的な状況下で議論が展開されることが望ましい。

2. 研究の目的

前項「研究開始当初の背景」で述べた問題意識に基づき、比較的単純な分岐で現れると考えられる吸引領域で、非一様双曲型になるものの構造及び分岐を高い正則性の下で、理論および数値計算(可視化)両方の観点から理解する、という観点から微分力学系の研究を遂行するのが本研究課題の目的である。具体的な研究内容を以下に述べる。研究主題を便宜上(a), (b), (c)の3つに分ける。(a)Gonchenkoらの近年の研究により、非双曲型不動点の周りで normal form analysis を行うことにより、分岐の余次元が十分高い場合には様々な吸引領域のように見える力学系が発生することが報告されている。その極限集合はいわゆるローレンツアトラクタの極限集合に見えるものや、複雑な位相幾何学的形状を持ったものなど多岐にわたる。ただ、上述の論文では normal form analysis の結論だけが与えられており、吸引領域の存在やその極限集合の非一様双曲性に関しては議論されていない。ローレンツアトラクタとの類推によると、この力学系は1次元の中心方向をロバストに持つ非双曲型の力学系であると考えられる。そこで、(a-1) 上述の力学系に吸引領域が現れることの厳密な証明および(a-2) 極限集合の非一様双曲性の厳密な証明をまずは目指す。これらの証明は幾何学的ローレンツアトラクタの基礎理論と法双曲型不変多様体の理論の標準的な適用により解決されると考えている。これらの結果は今後の結果の基礎となる。

(b)上述(a-1, 2)の結果と並行して、B. Krauskopf らのグループと協力をしてこれらの吸引領域の力学系の可視化、具体的にはこれらの吸引領域内の周期軌道の数値的検出、それらの(不)安定多様体の可視化を行う。これらの研究自体は数学的厳密さにはかけるものの、その推進は(a)の結果の証明のヒントになり、また、これらの結果の直感的な理解を容易にするというメリットがある。一般に非双曲型力学系の数値計算に関しては、まさにその非双曲性のため計算の収束の問題が付きまとう。研究代表者はこれまでに Krauskopf 氏らと非双曲型力学系の数値計算に関して実績があり、これまでの計算技術の応用により、今回の系に対しても十分な情報を持った計算結果を得られると期待している。この研究成功のためには Krauskopf 氏らのグループとの連携が重要であり、ワークショップ開催や短期訪問を通じて研究打ち合わせを行い研究を進めてゆく。上述(a)(b)の結果をもとに、非一様双曲型の吸引領域の構造論と分岐理論の研究を進める。具体的には、双曲性を定量的に測る指標としてリヤプノフ指数と呼ばれる量があるが、(c-1)リヤプノフ指数が当該の吸引領域においてどのような分布を持つか、また系の摂動によってどう変化するかを調べる。力学系のリヤプノフ指数はエントロピーや escaping rate など、力学系を定量的に測る種々の量と関連しており、非双曲型力学系の理論を現実の系に応用する際に重要な情報となる。その分析で重要な役割を果たすのは中心方向の力学系の振る舞いの解析だが、研究代表者は過去の D. Turaev 氏らとの共同研究で renormalization を取ることで中心方向の振る舞いを分析する方法を開発した。これを用いて本問題に取り組む予定である。リヤプノフ指数の研究はエルゴード理論的な系の理解を与えるが、位相幾何学的な構造論・分岐理論として(c-2) 吸引領域内部での鎖帰集集合が弱推移性を持つかどうかについて調べる。弱推移性は鎖帰集集合が内部に階層構造を持たないことを意味する。この性質は時系列解析と力学系を関連付けるような応用研究では異なるモードの(非)存在性と関連しており、重要な問題である。研究代表者は鎖帰集集合の構造に関して、吸引領域の境界のトポロジーが内部構造とその分岐に関係していることを C. Bonatti 氏との過去の共同研究で明らかにした。その過程で開発した flexible periodic points という摂動技術を目下の力学系に応用することで本問題にも解決がもたらせるのではないかと期待している。

3. 研究の方法

関連する分野の研究者を訪問, 招へいし議論を行うことにより研究を進める. 得られた結果は国内外の力学系の国際学会で発表を行い, 結果の含意などに関して専門家との意見交換を行う.

4. 研究成果

研究期間の年度ごとに研究成果を述べる.

2018年: 2018年度は, 主に研究全体に関する準備的な作業を進めた. 関連する文献整理を行い, 過去の研究において非双曲型吸引領域の力学系においてどのような問題意識が存在するかについて, 整理を行った. 2018年11月には中国武漢の Huazhong University of Science and Technology にて関連分野の研究者とワークショップを開催し, 研究打ち合わせを行い, ランダム力学系やエルゴード理論の観点から本研究主題に関する重要な問題について討議を行った.

非双曲型力学系の可視化に関する論文 “Existence of blenders in a Henon-like family: geometric insights from invariant manifold computations” が学術雑誌 Nonlinearity に掲載された. この論文では, 非双曲型力学系のうち部分双曲型力学系と呼ばれるものの発生において重要な役割を果たすブレンダーと呼ばれる構造に関して, その発生を数値的に検出する方法について提案を行ったものである. また, 具体的な系で発生するブレンダーを実際に3次元空間内に描出した. 結果としてブレンダーを直感的に理解することが容易になった.

力学系の研究集会で講演を行い, 非双曲型力学系における周期点の増大度に関するこれまでの自身の研究成果について周知を図った. より具体的には, 部分双曲型力学系において周期点の増大度を決定する要素として, 力学系を考えるとときに力学系の空間に導入する位相が重要であることと, 高次の微分の情報(アファイン不変量やシュワルツ微分)が重要であることを示唆する研究結果について講演を行った(2018年6月: 中国・深セン, 8月ブラジル・サルバドール, 12月中国・北京, 2019年1月: 日本・軽井沢).

2019年: 数値計算による研究について, ブレンダーと呼ばれる力学系的対象に対して, その直感的理解を容易にするためブレンダーに関連する様々な量の数値的研究を進め, 論文にまとめ投稿をした. この論文ではブレンダーの各点における不安定方向を線分片として具体的に表示し, またブレンダーを有する力学系のパラメータを動かしながらその不変多様体を描画することにより, ブレンダーが持っているギャップがどのように発生するのかを調べた. 部分双曲型力学系の周期点の増大度について, 部分双曲型力学系と呼ばれる系に対して, 高い正則性の下で通有的な超指数的増大度の発生に関する論文 “Fast growth of the number of periodic points arising from heterodimensional connections” をまとめ投稿した. 具体的には, 頑強に推移的な強部分双曲型力学系に対して, 中心方向が1次元であり, 中心方向の向きが力学系の作用で保たれていれば, その力学系が低い正則性の位相の下で超指数的増大度を持つなめらかな力学系で近似可能であることを証明した. この事実は「頑強に推移的な強部分双曲型力学系」というかなり広いクラスの非双曲型力学系において超指数的増大が観測されることを示しており, 大変興味深い. また, 中心方向の次元が高い非双曲型力学系に対してどのような野生性の発生の可能性があるかについての研究を進めた.

2020年度: 非双曲型力学系の可視化, 非双曲型力学系の通有的な性質, 非双曲型力学系における周期点の個数の発散速度に関して新しい知見が得られた. これら3点について以下具体的に述べる. (1)非双曲型力学系の可視化に関する研究について. ブレンダーと呼ばれる構造を持つ力学系に対してそのもととなる双曲型集合を数値的に計算する研究を継続した. また, 当該研究に関して投稿した論文 “How to identify a hyperbolic set as a blender” の学術誌 Discrete & Continuous Dynamical Systems - A への掲載が決定し, 出版された. (2)非双曲型力学系の通有的な性質に関する研究について. 部分双曲型力学系における周期点の超指数関数的増大に関して, ロバストなヘテロ次元サイクルを持つ力学系に対して, 中心方向の二階, 三階微分に関する自然な仮定の下で通有的に超指数的増大が発生していることを議論した論文 “Fast growth of the number of periodic points arising from heterodimensional connections” の学術誌 Compositio Mathematica への掲載が決定した. (3)非双曲型力学系における周期点の個数の発散速度に関する研究について. ロバストなヘテロ次元サイクルをもつ力学系に対して, 元となる周期点が周期1であることと, ヘテロ次元サイクルの余次元が1であるという仮定の元で(力学系の空間のある開集合における稠密なものに対して)周期点の発散速度が超指数関数的になるということを発見した. この結果は論文 “On super-exponential divergence of periodic points for partially hyperbolic systems” にまとめ, 専門誌に投稿した.

2021年度: 2021年度の研究は新型コロナウイルスの影響で予定の変更があった. 具体的には, 当初予定をしていた非双曲型力学系の研究に関する海外出張について, ニュージーランドへの出張を実施することができなかった. 実施した研究として, フランス, ディジョンのブルゴーニュ=フランシュ=コンテ大学・CNRS(フランス国立科学研究センター)のC. Bonatti氏を訪問し, 非双曲型力学系の分岐構造に関する研究打ち合わせを進めた. 具体的には同氏と過去の研究で定義した partially hyperbolic filtrating Markov partition というクラスの力学系のう

ち、性質 (1) と呼ばれる条件を満たすものに対して、それらが非周期類を発生させるメカニズムに関して、特に距離空間の位相幾何学的観点から整理を行った。結果として、非周期類が(非)極小性、拡大性、非一意エルゴード性、非推移性、などといった様々な力学系的性質を満たすことを証明するために必要な基礎理論を確立することができた。また、当該研究に関する研究発表をパリ南大学で行った。また、非双曲型力学系における特徴的な構造であるヘテロ次元サイクルと呼ばれる構造を有する力学系に対して、通有的に周期点の(周期に関する)分布がどのようになるかを調べた論文 “On super-exponential divergence of periodic points for partially hyperbolic systems” が学術誌 *Discrete and Continuous Dynamical Systems* に掲載決定された。同じく、ヘテロ次元サイクルを有する力学系に対して、周期点の(周期に関する)分布を調べた論文 “On super-exponential divergence of periodic points for partially hyperbolic systems” が学術誌 *Compositio Mathematica* に掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Stefanie Hittmeyer, Bernd Krauskopf, Hinke M. Osinga, Shinohara Katsutoshi	4. 巻 40
2. 論文標題 How to identify a hyperbolic set as a blender	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - A	6. 最初と最後の頁 6815 ~ 6836
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2020295	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Stefanie Hittmeyer, Bernd Krauskopf, Hinke M Osinga and Katsutoshi Shinohara	4. 巻 31
2. 論文標題 Existence of blenders in a Henon-like family: geometric insights from invariant manifold computations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 R239-R267
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/aacd66	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Asaoka Masayuki, Shinohara Katsutoshi, Turaev Dmitry	4. 巻 157
2. 論文標題 Fast growth of the number of periodic points arising from heterodimensional connections	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 1899 ~ 1963
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0010437X21007405	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 BONATTI CHRISTIAN, SHINOHARA KATSUTOSHI	4. 巻 38
2. 論文標題 Volume hyperbolicity and wildness	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Ergodic Theory and Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 886 ~ 920
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/etds.2016.51	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計4件(うち招待講演 4件/うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Katsutoshi Shinohara
2. 発表標題 Constructing new kinds of aperiodic classes for C^1 -generic diffeomorphisms
3. 学会等名 theorie ergodique et systemes dynamiques (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Katsutoshi Shinohara
2. 発表標題 Super exponential divergence of the number of periodic points near heterodimensional cycles
3. 学会等名 Resistencia Dinamica (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Katsutoshi Shinohara
2. 発表標題 Super exponential growth of number of periodic points for smooth generic partially hyperbolic diffeomorphisms
3. 学会等名 INTERNATIONAL CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Katsutoshi Shinohara
2. 発表標題 Super exponential growth of number of periodic points for smooth generic partially hyperbolic diffeomorphisms
3. 学会等名 Dynamical Systems and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ニュージーランド	University of Auckland			
英国	Imperial College London			
中国	華中科技大学			
フランス	Universite de Bourgogne			