

令和 5 年 5 月 15 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03368

研究課題名（和文）粘性流体方程式系の解の拡散と波動現象の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis of diffusion and diffusion wave property for the solutions to the system of the viscous fluid flow

研究代表者

小林 孝行 (Kobayashi, Takayuki)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授

研究者番号：50272133

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,300,000円

研究成果の概要（和文）：全空間における圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の初期値問題では、拡散波動現象を明らかにした。また、この方程式では、音速がゼロの場合を考察し、ソボレフ空間、臨界 Besov 空間、最大正則性の枠組みで定数平衡状態の安定性を示した。2次元全空間における Navier-Stokes 及び双曲型 Navier-Stokes 方程式の初期値問題では、解の時空間における L^2 有界性を証明した。また、双曲型 Navier-Stokes 方程式では外部領域と摂動半空間の場合に、解の局所エネルギー減衰評価を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式は、蒸気と液体の2相流で、相転移境界が薄い遷移ゾーンとして見なされるモデル方程式として提唱されている。この方程式の圧力項は非単調増加関数であるため、定数平衡状態の安定性を議論する場合、音速がゼロの場合の考察が必要である。本研究で、その初期値問題が初めて考察され、安定性が示されたことは学術的意義がある。双曲型 Navier-Stokes 方程式は、斉次非圧縮性 Maxwell 流体のモデル方程式として提唱されている。本研究で、初期値境界値問題が初めて考察され、局所エネルギー減衰評価が得られたことは学術的意義がある。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study is to investigate the existence of global solutions and its asymptotic behavior for the compressible Navier-Stokes equations, compressible Navier-Stokes-Korteweg equations, and hyperbolic Navier-Stokes equations. The objective is to mathematically clarify the wave and diffusion phenomena that appear in the flow.

In the initial value problem of the compressible Navier-Stokes-Korteweg equations, we clarified the diffusion wave phenomenon. In this system, we considered the case of zero speed of sound and showed the stability of the constant equilibrium state in the framework of Sobolev spaces, critical Besov spaces and maximal regularity. In the initial value problem of the Navier-Stokes equations, we proved the space-time L^2 boundedness of the solutions. We also showed the local energy decay estimates of the solutions to the hyperbolic Navier-Stokes equations in the exterior domain and the perturbed half-space.

研究分野：数物系科学

キーワード：Navier-Stokes 方程式 2相流相転移モデル 双曲型 Navier-Stokes 方程式 圧縮性 Navier-Stokes 方程式 消散項付波動方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式は、J. D. Van der Waals により 2 相流等の場合、相転移境界は密度の急勾配によって薄い遷移層と見なされることが提唱され、その後、D. J. Korteweg によってそのモデル方程式が提唱された。近年その初期値問題が盛んに研究される様になり、R. Danchin 等により小さい初期値に対する時間大域解の唯一存在が示されている。

非圧縮性双曲型 Navier-Stokes 方程式は、斉次非圧縮性 Maxwell 流体の運動の記述として提唱されている。非圧縮性粘性流の基礎方程式として知られる古典的非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は Fourier 則によって導出される。この Fourier 則を Cattaneo 則に置き換えた方程式が非圧縮性双曲型 Navier-Stokes 方程式である。具体的には、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に現れる変形テンソルを時間遅延した変形テンソルに置き換えたものであり、遅延時間パラメータを Taylor 展開した第一近似として表現された方程式である。O. Ladyzhenskaya は 2 次元有界領域の初期値境界値問題の場合に時間大域的な弱解の存在を示した。一般次元の場合には R. Racke and J. Saal 等によって初期値問題および半空間の初期値境界値問題の場合に、小さい初期値に対する時間大域強解の一意存在が示されている。

圧縮性 Navier-Stokes 方程式と非圧縮性双曲型 Navier-Stokes 方程式の解の構造において、前者の線形近似は非圧縮性 Stokes 方程式と線形粘性弾性体方程式であり、後者はソレノイダルベクトル場における消散項付波動方程式である。拡散項と波動項の相互作用が異なるため、粘性流体方程式系の解の拡散現象と波動現象を知るためには、解の時間無限における漸近挙動の数学解析は重要課題である。特に、物理的に重要な様々な領域での研究結果は申請者の知る限りほとんどないため、今後の大きな研究課題である。

2. 研究の目的

これまでの圧縮性 Navier-Stokes 方程式の定数平衡状態の安定性の研究から、初期値問題の場合、解は拡散項、拡散波動項、非線形項を含む高減衰項の 3 つに漸近的に分類されることがわかってきている。 L_p ($p > 2$) 空間で測ると第一近似は拡散項で Stokes 方程式の初期値問題の解の速度場となる。拡散波動項は線形粘性弾性体方程式、つまり強消散項付きの波動方程式であり、流体の密度部分がこれに相当し、拡散項より早く減衰する。一方、 L_p ($p < 2$) 空間で測るとこの事実は逆転し、拡散波動項が第一近似となる。特に、解の L^1 評価は時間に関して増大する。これらの事実は、線形粘性弾性体方程式が持つ双曲型の特徴である広い意味での Huygens の原理によるものである。外部領域の初期値境界値問題の場合は、線形化方程式の解の表示式がないため困難が生じる。この場合は、境界近くの局所エネルギー減衰評価を導きこれを利用することで解の拡散波動を示す減衰評価は申請者により得られている。しかし、解の減衰評価または増大評価が示されているだけで、拡散項や拡散波動項の抽出までには至っていない。また全空間の場合でも、定数平衡状態近くの定常解の安定性や圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の初期値問題ではこれらの問題は未解決である。

- そのため、圧縮性 Navier-Stokes 方程式と圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式では
- ・初期値問題で、定数平衡状態近くの圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の解の漸近挙動を研究し、拡散項や拡散波動項の抽出を行うことで広い意味での Huygens の原理を明らかにする
 - ・初期値問題で、圧縮性 Navier-Stokes 方程式の定数平衡状態近くの定常解の安定性を研究し、厳密な解の減衰評価を導く

・ 外部領域における初期値境界値問題で定数平衡状態近くの圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の解の漸近挙動を研究し、広い意味での Huygens の原理を明らかにすることが目的である。また、非圧縮性双曲型 Navier-Stokes 方程式では、外部領域における初期値境界値問題と摂動半空間における初期値境界値問題に焦点を絞る

・ 小さい初期値に対する時間大域的な強解の一意存在

・ 解の時間に関する漸近挙動

・ 遅延時間パラメータに関するゼロ近似極限

を数学的に明らかにすることが目的である。

3. 研究の方法

本研究を遂行するためには、偏微分方程式論、函数解析学、実解析学等を含め最新の結果や手法を常に研究し、情報交換することが必要である。そのために、国内では毎年研究会、「非線型の諸問題」、「若手のための偏微分方程式と数学解析」の企画開催、京都大学数理解析研究所で行われる偏微分方程式の研究集会、「九州における偏微分方程式研究集会」、各種の解析セミナー、海外で行われる偏微分方程式の研究集会等に参加し情報収集を行う。また、筑波大学の久保徹隆氏とはこれまで非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に関する共同研究を行なって来ており、局所エネルギー減衰評価の手法にも精通しているため、研究打ち合わせを行い進める。

・ 全空間における圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の解の漸近挙動を研究し、拡散項や拡散波動項の抽出を行う

・ 外部領域における圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式と外部領域、摂動半空間における非圧縮性双曲型 Navier-Stokes 方程式の線形化方程式のレゾルベント問題から考察し、境界近くの局所的レゾルベント評価を導くことで、その線形化方程式から生成される半群の局所エネルギー減衰評価を導く

・ 全空間における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の線形化方程式のレゾルベント問題に着手し、定常解の安定性について考察する

・ 外部領域における圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式と、外部領域および摂動半空間における消散項付波動方程式の半群の局所エネルギー評価を導き、全空間における解の L_p - L_q 評価と cutoff テクニックを用いて線形化方程式の解の L_p - L_q 評価を導く

・ 非圧縮性双曲型 Navier-Stokes 方程式の外部領域における初期値境界値問題と摂動半空間における初期値境界値問題で、小さい初期値に対する時間大域強解の一意存在と解の時間に関する漸近挙動存在を考察、さらに遅延時間パラメータに関するゼロ近似極限の研究を行う

4. 研究成果

(1) 非圧縮性双曲型 Navier-Stokes 方程式では外部領域と摂動半空間における初期値境界値問題を考察し、線形化方程式の解の局所エネルギー減衰評価を示した。この線形化方程式は、ソレノイダルベクトル場における摩擦項付波動方程式である。これまで、外部領域における摩擦項付波動方程式の初期値境界値問題では、解の局所エネルギー減衰評価が知られていたが、ソレノイダルベクトル場において初めて得られた結果である。特に、摂動半空間における初期値境界値問題では、外部領域における初期値境界値問題より良い評価が得られることがわかった。

(2) 全空間における圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の初期値問題では、定数平衡状態の安定性について研究し、解の時間無限における漸近挙動の詳細な結果を得ることに成功し

た。特に、漸近挙動として拡散項や拡散波動項の抽出に成功した。これらの事実は、線形粘性弾性体方程式が持つ双曲型の特徴である広い意味での Huygens の原理を明らかにしたものである。

(3) 圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式では、相転移を記述するための圧力項は非単調増加関数でなければならない。したがって、全空間における初期値問題において、音速がゼロの場合も考察し、ソボレフ空間、臨界 Besov 空間、最大正則性の枠組みで定数平衡状態の安定性と解の漸近挙動の詳細な結果を得ることに成功した。特に、音速がゼロの場合を含む結果は、有界領域における初期値境界値問題では知られていたが、非有界領域の場合は初めての結果である。

(4) 2次元全空間における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式や非圧縮性双曲型 Navier-Stokes 方程式の初期値問題では、その線形化方程式の解の時間に関する減衰レートが弱いため、解は時空間における L^2 空間に属することは知られていなかった。一般的なエネルギー法の立場からも、解が時空間における L^2 空間に属することと、これらの減衰レートを得ることは互換であるため重要である。我々は、ソレノイダルベクトル場における共役不等式と非線形項の div-curl 構造を利用することで、可積分空間かつ2乗可積分空間に属する小さい初期値に対して、解は時空間における L^2 空間 に属することを証明した。

(5) 2次元全空間における圧縮性 Navier-Stokes 方程式と圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の初期値問題では、密度場の線形化方程式は線形粘性弾性体方程式である。我々は、Morawetz の方法を用いたエネルギー法と Fefferman-Stein の不等式 を用いることで、初期値がハーディ空間に属せば解は時空間における L^2 空間に属することを証明した。結果として、非線形問題でも、初期値に小ささを仮定すれば、密度場に対して拡散波動効果が得られることを証明した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 T. Kobayashi and K. Tsuda	4. 巻 64
2. 論文標題 Time decay estimate with diffusion wave property and smoothing effect for solutions to the compressible Navier-Stokes-Korteweg system	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 163-187
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Kobayashi and K. Tsuda	4. 巻 121, No. 2
2. 論文標題 Global existence and time decay estimate of solutions to the compressible Navier-Stokes-Korteweg system under critical condition	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 195-217
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3233/ASY-201600	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Kobayashi and M. MURATA	4. 巻 34, No. 5-6
2. 論文標題 The global well-posedness of the compressible fluid model of Korteweg type for the critical case	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 245-264
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Kobayashi, M. Misawa and K. Tsuda	4. 巻 9(6) 683
2. 論文標題 Asymptotic profile for diffusion wave terms of the compressible Navier-Stokes-Korteweg system	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-20
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/math9060683	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 N. Chikami and T. Kobayashi	4. 巻 21
2. 論文標題 Global well-posedness and time-decay estimates of the compressible Navier-Stokes-Korteweg system in critical Besov spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Fluid Mech.	6. 最初と最後の頁 1-32
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00021-019-0431-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 T. Kobayashi, M. Misawa and K. Nakamura	4. 巻 43, No 2.
2. 論文標題 Time-space L2-boundedness for the 2D Navier-Stokes equations and hyperbolic Navier-Stokes equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Tsukuba J. Mathematics	6. 最初と最後の頁 223-239
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kobayashi, T. Kubo and K. Nakamura	4. 巻 263, 10
2. 論文標題 On a local energy decay estimate of solutions to the hyperbolic type Stokes equations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations,	6. 最初と最後の頁 6061-6081
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件(うち招待講演 10件/うち国際学会 7件)

1. 発表者名 T. Kobayashi
2. 発表標題 On a local energy decay estimates of solutions to the Hyperbolic type Stokes equations
3. 学会等名 Conference on Mathematical Fluid Dynamics, Bad Boll, Germany (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Kobayashi
2. 発表標題 On a local energy decay estimates of solutions to the linear hyperbolic Navier Stokes equations
3. 学会等名 The Third Wayamba International Conference, Wayamba University, Sri Lanka (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Kobayashi
2. 発表標題 Decay property for the Compressible Navier-Stokes-Korteweg system
3. 学会等名 Workshop on Mathematical Sciences, Wayamba University, Sri Lanka (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Kobayashi
2. 発表標題 Stability problem for a constant equilibrium to the Compressible Navier-Stokes-Korteweg system
3. 学会等名 Mathematical Fluid Mechanics and Related Topic, Tokyo Inst. Tech. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Kobayashi
2. 発表標題 Global existence of solutions to the compressible Navier-Stokes-Korteweg system
3. 学会等名 第36回九州における偏微分方程式研究集会, 九州大学西新プラザ (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Kobayashi
2. 発表標題 Global existence and time decay estimate of solutions to the compressible Navier-Stokes-Korteweg system under critical condition
3. 学会等名 Maximal regularity and nonlinear PDE, RIMS, Kyoto University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Kobayashi
2. 発表標題 On the compressible Navier-Stokes-Korteweg system under the critical condition
3. 学会等名 研究集会「Dispersive and wave equations」(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 T. Kobayashi
2. 発表標題 研究集会「非線型偏微分方程式と走化性」, 北九州国際会議場
3. 学会等名 圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の大域的適切性について (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 T. Kobayashi
2. 発表標題 Global well-posedness of the compressible Navier-Stokes-Korteweg system under critical condition
3. 学会等名 International Workshop on Multi-Phase Flows: Analysis, Modelling and Numerics, 早稲田大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 T. Kobayashi
2. 発表標題 圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の時間大域解の存在と解の漸近挙動について
3. 学会等名 第10回弘前非線形方程式研究会, 弘前大学 (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------