様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　５ 年　　６ 月 ２６ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｋ０３３８１

研究課題名（和文）関数空間上の汎関数に対するエネルギー最大勾配曲線の統合的研究

研究課題名（英文）Integrated study of curves of maximal slope for the energy functionals on a functional space

研究代表者
山浦　義彦（YAMAURA, Yoshihiko）

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：９０２５５５９７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：時間発展型偏微分方程式のエネルギー勾配流に基づいた研究を目指した。２つの研究手法により研究を進めた。１つは Marino らによる局所エネルギー最小化法であり、他方は DeGiorgi と N. Kikuchi によって独立に創始された離散モース流法である。前者の手法では、準線形熱方程式を考察した。特に、時間発展問題において、Weissler 指数の変分的意味を考察することができた。後者の手法では退化型 p-ラプラシアン放物型偏微分方程式に対するエネルギー勾配流を構成することができた。特に近似パラメータに従属しない一様ヘルダー評価を用いた正則性解析を実現することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
【学術的意義】通常、放物型偏微分方程式の弱解の正則性解析は、時間微分を含めた解析になる。本研究では、２つの方法を基にして研究を進めたが、そのいずれの方法でも正則性は楕円型偏微分方程式の正則性理論を適用することになる。さらに、変分解析に基づく弱解の構成を実現することにより、数値解析への応用の可能性を模索することが可能になる。時間発展問題への変分解析からのアプローチは、偏微分方程式の研究に新しい視点を与えるものと期待される。
【社会的意義】 自然現象、社会現象を数値解析的に視覚化することはコンピュータの発達により実現可能になってきている。本研究はその基礎理論構築と位置づけられる。

研究成果の概要（英文）：We aim at the study of time evolutional partial differential equations by invoking the two discrete approximation methods based on the variational analysis. One is the method of local minimizing method originated by Marino, Saccon and Tosques. The other is the Discrete Morse Flow method originated by DeGiorgi and N.Kikuchi, independently. We can point out that the analysis of the regularity of weak solutions is realized by the thory of elliptic, not parabolic, PDE. For the former method, we investigate the semilinear heat equations. In particular, we obtain that the Weissler's exponent which is well-known in this theory is significant in the framework of variational analysis. For the latter method, we construct a weak solution to a p-Laplacian parabolic equations by an approximation method. The characteristic feature of this result is to attain the uniform regularity estimation to the approximate solutions independently on the approximation parameter.

研究分野：変分解析

キーワード：エネルギー勾配流　離散モース流法　時間発展 p-ラプラシアン方程式　準線形熱型方程式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

自然現象や工学現象において「エネルギー量を最小化する」ことを手掛かりとして、定常状態の数学的考察を行う、いわゆる「変分法」は古典的には Lagrange から始まり、その歴史的背景からわかるように、現象の定常状態を記述する楕円型偏微分方程式の解の存在および正則性を追究するための自然、かつ具体的な方法として発展してきた。一方、近年盛んに研究されている時間経過に伴って変化する物理現象を記述する放物型偏微分方程式や双曲型偏微分方程式にあっては、変分原理と時間発展という相容れない原理の相違のため、変分法による寄与はありえないと古くから考えられてきた。ところが、変分法の発展に本質的な貢献をしてきたイタリア・ピサを中心とする伝統的な変分学派により、１９８０年代初頭から変分法を放物型方程式の研究に応用しようという試みがなされた。その結果確立されたのが、本研究における中心的な概念である最大勾配曲線 (curves of maximal slope [以下、CMS と略記する])の理論である。それは放物型偏微分方程式への応用にとどまらず、一般距離空間上のエネルギー汎関数に対して凸性、微分可能性を一切仮定することなく物理現象に即した解を求めることが可能な手段として注目されている。また、これとほぼ同時期に、やはりイタリア・ピサの学派と日本の研究者である菊池紀夫教授によりそれぞれ独立に、時間変数を離散化し常微分方程式において解の構成方法としてよく知られているオイラー法にヒントを得て発展させた変分学の適用手法が研究され、現在では様々な時間発展問題の研究に応用されている。

２．研究の目的

「１.研究開始当初の背景」で述べた背景に基づいて、本研究では時間発展問題の弱解の存在や正則性解析を主眼とし、変分法の利用による諸問題への適用可能性について新たな知見を得ることを目的とする。この研究を推し進める上での研究手法として、次の「３.研究の方法」で述べる２つの既存の研究手法を採用し、放物型偏微分方程式や双曲型偏微分方程式に対して、その弱解の構成を行うことを目的とする。研究方法で述べる EL-法については、非凸問題への適用と、既存の結果である準線形放物型偏微分方程式の弱解の構成について別視点で考察を行うことを目的とする。また、放物型偏微分方程式系、双曲型偏微分方程式系に対する MM-法の適用により、変分法の時間発展問題の正則性解析に対する適用可能性と、一般臨界点より強い条件であるエネルギー最小性の優位性を明らかにすることを目的とする。以上の変分解析に基づく具体的かつ公正的な証明方法の採用を通じて、定常状態で精密な弱解正則性解析が確立されている変分解析の時間発展問題への応用研究の具体例という成果を挙げることにより、数値解析における結果との連携を図り、手法の広い有用性を実証することを目的とする。

３．研究の方法

背景に述べた CMS は、滑らかな関数に対する勾配の絶対値量の一般化概念である勾配(スロープ)を、最適に最小化する曲線として定義される自然な概念である。ベクトル構造をもつ Hilbert 空間上では、凸汎関数に対する CMS は、放物型方程式の解になることから、いわゆるエネルギー勾配流の一般化概念であることが分かる。CMS を構成する方法としては以下の 2 つの手法が知られている。一つは、時間変数を離散化することによって得られる変分汎関数の最小化関数の列から近似解を構成するという手法であり、常微分方程式における Euler 法がその根本アイデアである。この方法は DeGiorgi と Ambrosio によって１９８０年代に考案され、Minimizing movement 法とよばれている(以下、MM-法と記す)。他の１つは、DeGiorgi、Marino、Tosques によって同時期に考案された方法である。エネルギー汎関数の定義域となる関数空間における局所閉球で逐次、最小関数を見つけていく手法であり、(一般的用語ではないが、本研究ではわかりやすさのためこの方法を) Local extension 法とよぶ (以下、LE-法と記す)。それぞれの方法の特徴を述べると次のようになる。MM-法は定義される最小化関数の列から構成される近似解が直接 CMS の近似解を与える方法であり、構成的な方法と位置付けられる。そのため、数値計算の理論として応用可能であり、数値解析の基礎理論として採用されている。２０００年頃に、Jordan、Kinderrlehrer、Otto は Fokker-Planck 方程式の解に対する Gibbs-Boltzmann エントロピーの増大性を MM-法を用いて数学的に初めて証明した。この論文をきっかけとして、一般距離空間上での MM-法の研究が多くの研究者たちの注目を集めた。その一方で、この方法で構成できる解は時間大域解に限られるという特徴がある。すなわち、有限時間で爆発するような解を求めることはできない。一方の LE-法は、最小化関数の列を用いて構成される近似解に対して時間変数のパラメータ変換という操作が不可欠になる。この操作のため、この手法は構成的ではなく数値計算理論には適さないとされている。しかし、このパラメータ変換のトリックのおかげで、有限時間爆発解もとらえることができる。このことは、定義域内の有界領域上でのみ変分問題を考えることとも大きく関係する。この理由により、エネルギー汎関数に対して大域的な下からの有界性を課す必要がなく、局所的に下に有界であればこの手法を適用できる。こうして、非凸な負の項をもつようなエネルギー汎関数への応用の可能性が生まれる。

４．研究成果

(1) 成果

研究目的で述べた、EL-法と MM-法を用いた研究成果としてそれぞれ、研究論文[1]と[2](末尾のリスト参照)として出版することができたので、それぞれについて、概要と意義、および、今後の課題について述べる。また、MM-法による研究では、研究費申請期間中に概ねの結果を出すことができた、双曲型偏微分方程式に関する研究論文[3](現在投稿作業中)についても言及したい。

・論文[1]

扱う方程式は準線形熱型偏微分方程式である。EL-法による強発展曲線の構成は、Hilbert 空間上の凸汎関数に対しては関数解析学の諸定理の適用により一般論として確立されている。この論文では 凸汎関数のエネルギー勾配流である熱型方程式に、ｐ乗積分項のマイナス項を付加して得られるエネルギー汎関数に対する強発展曲線の構成を試みた。付加した項により、この汎関数は非凸であり、上記一般論の適用はできない。論文では、この非凸項を「補間不等式」(Interpolation inequality)によって回避処理することにより、変分解析を可能にした。その際に冪に対して課される条件が、よく知られている Weissler 指数条件であり、それとの関係性を検証することができた。実際、２次元と３次元においては、局所時間における解の存在を保証する指数と同じ結果が変分解析の枠組みで検証できたことになる。４次元以上では Weissler 指数より強い条件が必要となるが、これは技術的な理由に過ぎず、その改善は今後の課題になっている。なお、本論文の結果は、Saccon により Restriction trick を用いて Marino、Saccon、Tosuques によって確立された関数クラス解析への埋め込みによって知られている。これに対して、本論文は Restriction trick を用いない証明方法をとることにより、Weissler 指数との変分解析的な関係性を発見できた。新しい結果ではないが、関係性発見という観点では有意義な結果であると考える。さらにこの論文完成は、より一般的な ｐラプラシアン型変分汎関数や、分数階ソボレフ関数空間上の非局所汎関数の解析に対する動機付けという重要なきっかけを与えてくれた。それらについては現在研究を継続して取り組んでいる。なお、MM 法では構造的に、時間大域解の構成に成否を与える事しかできないのに対して、この方法では時間局所解の構成も可能になるため、必ずしも時間大域解が存在しない問題への応用も可能になる。エネルギー勾配流に基づいた解の爆発の研究も今後の課題である。

・論文[2]

扱う方程式は退化型ｐ-ラプラシアン放物型偏微分方程式である。退化性はｐが２より真に大きいという条件から従う。未知関数の時間変数を離散化し、放物型方程式の時間微分項を時間差分項に置き換え、それを Euler-Lagrange 方程式とするエネルギー汎関数を考える、という問題設定である。初期値として空間領域上の関数を与え、それを出発点として再帰的にエネルギー汎関数の最小化関数を順次定義し、得られた関数列から近似解を構成する。この論文のオリジナルな点は、空間主要項の退化性回避の扱いを加えたことである。ｐは２より真に大きいという条件下では方程式の空間微分主要項は、未知関数の１階空間微分が０になると無限大に発散する。そのため、空間２階弱微分の可積分性が保証されず、正則性解析に決定的に不利な条件になることが分かっている。そこで、この論文では任意の正数≪イプシロン≫を導入し、ｐラプラシアン項の空間微分にイプシロンを加えることにより、退化性を取り除き処理をしている。このため、得られる近似弱解の正則性解析にあたっては、冒頭で述べた時間変数の離散化パラメータと、ここで述べた退化性回避のために導入されたパラメータという２つのパラメータについて、それらに従属しない一様評価が要請される。実際の正則性解析はグローバル評価と局所評価の二段階で実現される。前者はエネルギー汎関数収束理論である≪ガンマ収束性理論≫の適用により、退化性除去のためのパラメータをコントロールすることができた。また、局所評価では Morser iteration テクニックを利用することによりヘルダー正則性達成したが、近似弱解の段階で時間変数離散化パラメータと考える時空領域である局所シリンダーの半径との関係に応じた精密な場合分けの議論により一様評価を得ることができた。この精密な場合分けに基づく評価は、MM-法の特に Discrete Morse flow 法と呼ばれる局所正則性解析の証明方法の大きな特徴でもある。今後の課題は、ｐが２より小さい非退化型方程式に対する対応する研究である。

・論文[3] (論文作成作業途中)

扱う方程式は、Legendre-Hadamard 条件を満たす係数をもつ 2 次形式微分線型双曲型偏微分方程式である。目標は、弱解の構成とその正則性解析である。特に、この論文では弱解の１階空間微分の高可積分性を証明した。先行結果として、Legendre 条件を満たす係数をもつ２次形式線型双曲型偏微分方程式についての同等の結果が知られている(１９９０)。本論文はその係数条件を、２次形式という枠組みにおいては quasi-convex(擬凸)性と同等な条件である Legendre-Hadamard 条件に置き換えて同じ結果を証明した。それだけでなく、先行結果では時間離散化変分汎関数のエネルギー最小性は、弱解の構成(存在)の証明で使われるだけであったのに対して、の論文ではグローバル評価でもエネルギー最小性を本質的に使っている点が大きな特徴である。

Legendre 条件を、より弱い Legendre-Hadamard 条件に変更することにより、エネルギー汎関数の下からの評価が保証されなくなる。つまり、Legendre-Hadamard 条件下では、係数付き空間微分項から２乗可積分のマイナス項が生じる。この困難の克服のため、放物型偏微分方程式の MM-法の扱いで効果が認められた(加藤伸幸氏との共著論文)Transformation トリックを適用し、それが双曲型偏微分方程式に対してもうまく作用することを実証した。このトリックにより、Legendre-Hadamard 係数の汎関数に対しても凸性を利用した変分解析が可能であることが実証され、一般論としても変分解析への可能性が広がったと言うことができる。さらに、考える空間領域の境界の滑らかさの仮定を除き、Poincare 型上限評価においては、先行結果における２次非線形試験関数に対して、より単純な１次線型試験関数での計算が可能になり、スマートな証明が可能になった。この研究の次に、消散項つき Legendre-Hadamard 係数つき非線形双曲型偏微分方程式の研究が課題である。

(2)得られた成果の国内外における位置づけ、インパクト

MM-法は最近では様々な問題の弱解構成証明における一手法として確立されている。一方で、一般的な研究方法は、MM-法によって得られた弱解、すなわち、近似パラメータの極限移行により得られたに放物型あるいは双曲型偏微分方程式の「弱解」について、正則性解析を適用することによって結果を得るというものである。これに対して、本研究は近似解の族に対する、近似パラメータに従属しない一様局所正則性解析を行っている点に特徴がある。それは弱解の「構成的方法」を強く意識したものであり、極限関数である弱解だけでなく、近似関数族に対して一様正則性評価を導出するという数学的理論として自然であるだけでなく、コンピュータサイエンスへの応用可能性という側面も持ち合わせている。これは創始者である菊池紀夫教授により提唱された重要、かつ、独創的な観点であるが、この点に着目した MM-法の研究は国内外でもほとんど行われていないように見受けられる。実際、多くの場合近似解に対する解析は「大局的評価導出」に限られており、正則性解析の要となる「局所評価」の導出はほとんどの場合行われない。いわゆる Discrete Morse flow 法による適用例の結果を発表できたことは本手法の意義をより明確にすることができたと考える。

(3)意義のまとめと今後の展望

以上の研究成果を通じて、通常は定常状態の現象解析に用いる変分解析を利用することによって、時間発展型方程式である、放物型偏微分方程式および双曲型偏微分方程式の解析が具体的な問題に対して、EL-法および MM-法それぞれの特徴を生かした研究が実現できたことになる。MM-法による Discrete Morse flow の研究では特に、エネルギー最小性をどこまで本質的に利用できるか、が興味の対象の一つであるが、得られた結果はいずれも正則性解析においても汎関数最小性の利用に成功しており、本来のエネルギー勾配流構成を目指す研究に即した証明になっている。変分解析の優位性を活かしたこの手法による正則性解析は、変分法研究の立場から考えれば有意義な結果と考えられる。また、変分法導入の一つの理由として、それが構成的な手法であることから数値解析への応用可能性があるという点である。変分解析は構成的方法によってエネルギー最小化関数を見つけることができるため、数値解析への応用の可能性をもつ理論構築が具体的な方程式に対して検証されたことの意義が認められると考える。

EL-法については本研究期間中の研究成果は[1]に限定されたが、現在、非局所解析、すなわち、分数階 Sobolev 関数空間上の汎関数の解析への応用を研究中である。また、MM-法については[3]に非線型項である「消散項」を付加した問題への Legendre-Hadamard 条件下での非線型双曲型偏微分方程式の研究を推し進めており、今後様々な問題へのさらなる応用を試みたい。

[1] Another interpretation for the Weissler's critical exponent in the theory of semilinear parabolic PDE.International Journal of Differential Equations and Applications, Volume 19,No.1(2020), pp.109-13(三村与士文氏との共著).

[2] The discrete Morse flow method for parabolic p-Laplacian systems, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 200, issue 3 (June 2021)pp.1245-1275(加藤伸幸氏, 三沢正史氏との共著).

[3] Construction of a more highly integrable weak solution to hyperbolic systems with coefficients satisfying the Legendre-Hadamard condition, preprint (加藤伸幸氏, 星野慶介氏との共著).

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　4件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 Yoshiho Akagawa, Elliott Ginder, Syota Koide, Seiro Omata, Karel Svadlenka	4．巻 27(5)
2．論文標題 A Crank-Nicolson type minimization scheme for a hyperbolic free boundary problem	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B	6．最初と最後の頁 2661-2681
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcdsb.2021153	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Siddharth Gavhale, Karel Svadlenka	4．巻 67(5)
2．論文標題 Dewetting dynamics of anisotropic particles - a level set numerical approach	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Applications of Mathematics	6．最初と最後の頁 543-571
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.21136/AM.2021.0040-21	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Rhudaina Z. Mohammad, Hideki Murakawa, Karel Svadlenka, Hideru Togashi	4．巻 5, 239
2．論文標題 A numerical algorithm for modeling cellular rearrangements in tissue morphogenesis	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Communications Biology	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1038/s42003-022-03174-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1．著者名 Yoshifumi MIMURA	4．巻 57
2．論文標題 Variational solution construction methods for dissipative and conservative systems	5．発行年 2022年
3．雑誌名 日本大学文理学部自然科学研究所紀要	6．最初と最後の頁 155-160
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Yoshifumi Mimura, Yoshihiko Yamaura	4．巻 19
2．論文標題 Another interpretation for the Weissler's critical exponent in the theory of semilinear parbolic PDE	5．発行年 2020年
3．雑誌名 International Journal of Differential Equations and Applications	6．最初と最後の頁 109-132
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Nobuyuki Kato, Masashi Misawa, Yoshihiko Yamaura	4．巻 19
2．論文標題 The discrete Morse flow method for parabolic p-Laplacian systems	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata	6．最初と最後の頁 1245 - 1275
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 D. Drozdenko, M. Knapek, M. Kruzik, K. Mathis, K. Svadlenka, J. Valdman,	4．巻 90
2．論文標題 Elastoplastic deformations of layered structures	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Milan Journal of Mathematics	6．最初と最後の頁 691-706
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00032-022-00368-9	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計10件（うち招待講演　3件／うち国際学会　5件）

1．発表者名 Karel Svadlenka
2．発表標題 Solution of hyperbolic equations through energy preserving approximations
3．学会等名 The 46th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, Hokkaido University
4．発表年 2021年

1．発表者名
Yoshihiko Yamaura

2．発表標題
A convergence of the approximated free boundary of regularized functionals via Gamma-convergence

3．学会等名
The 2nd International Conference on Numerical Modelling in Engineering（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
Yoshihiko Yamaura

2．発表標題
On a convergence for the approximation of the gradient flow curve to the non-convex and singular functional

3．学会等名
2019 International Conference on Machine Learning and Intelligent Systems (MLIS2019)（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
Svadlenka Karel

2．発表標題
Life and Natural Science Fusion

3．学会等名
Mathematical modeling of cellular dynamics in morphogenesis, HeKKSaGOn Meeting Work Group 1, Heidelberg University, Germany（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
Svadlenka Karel

2．発表標題
Numerical analysis of mechanics of layered structures

3．学会等名
EU-Japan Workshop on Mille-feuille Structured Materials, Prague, Czech Republic（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
Svadlenka Karel

2．発表標題
Approximation of motion of weighted interfacial network and its application to cellular patterns formation

3．学会等名
Kyoto Winter School 2019 "Quantifying Dynamics of Life", Kyoto, Japan（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
Svadlenka Karel

2．発表標題
Numerical approach to filament dynamics

3．学会等名
Czech－Japanese Seminar in Applied Mathematics

4．発表年
2018年

1．発表者名
Svadlenka Karel

2．発表標題
On some extensions of thresholding schemes

3．学会等名
The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications

4．発表年
2018年

1．発表者名
Svadlenka Karel

2．発表標題
Numerical approach to hyperbolic motions of co-dimension 2

3．学会等名
The Seventh China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics

4．発表年
2018年

１．発表者名 Svadlenka Karel
２．発表標題 Numerical simulation of sensory tissue formation
３．学会等名 A3 Soft matter workshop, Peking, China
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	三村　与士文 (MIMURA Yoshifumi) (30646427)	日本大学・文理学部・助教 (32665)	
研究分担者	ＳＶＡＤＬＥＮＫＡ　ＫＡＲＥＬ (SHUWADORENKA Kareru) (60572188)	京都大学・理学研究科・准教授 (14301)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関