

令和 6 年 5 月 20 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K03385

研究課題名（和文）パラメトリック・ストークス現象の完全WKB解析

研究課題名（英文）Exact WKB analysis of parametric Stokes phenomena

研究代表者

青木 貴史（Aoki, Takashi）

近畿大学・理工学部・名誉教授

研究者番号：80159285

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：大きなパラメータを持つガウスの超幾何微分方程式のWKB解のボレル和と古典的超幾何関数の関係を明らかにした。併せて超幾何微分方程式に含まれるパラメータに関するストークス現象が記述できることを示した。応用として、超幾何関数の大きなパラメータに関する漸近展開公式を一般的な形で得た。この研究では超幾何微分方程式のヴォロス係数の具体的表示を得ることが鍵となっている。ヴォロス係数に関しては、ガウスの超幾何微分方程式を含む系列として得られている一般化超幾何微分方程式についても、原点及び無限遠点では具体的表示を得た。これらの表示が一般化超幾何微分方程式の退化図式と整合する退化構造を持つことを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

完全WKB解析は三十余前に始まり、多くの成果を挙げつつ発展してきたが、最近になりさらに多くの分野との結びつきが明らかになり、注目を浴びつつある。本研究で得られた成果は、完全WKB解析と古典解析の橋渡しを与えるという学術的意義を持つ。完全WKB解析の強みは、WKB解のボレル和を用いた関数の大域解析であるが、実際の問題に应用する際には古典的な解析関数との関係を明らかにする必要がある。本研究で与えた結果は、超幾何関数について、この部分を明らかにしている。併せて得られた超幾何関数の漸近展開公式は、将来的に公式集に含まれ、多くの応用で重要な役割を果たすことを期待している。

研究成果の概要（英文）：The relation between the Borel sum of WKB solutions to the Gauss hypergeometric differential equation and the hypergeometric function is obtained. This result contains the description of the parametric Stokes phenomena for the WKB solutions to the equation. As an application, we obtained the asymptotic expansion formulas for the hypergeometric function with respect to the large parameter. Computation of the Voros coefficients of the hypergeometric differential equation is the key for this research. The explicit forms of the Voros coefficients for the generalized hypergeometric differential equation are also obtained for the origin and for the infinity. These expressions are compatible with the degeneration diagrams of the generalized hypergeometric differential equations.

研究分野：解析学

キーワード：超幾何関数 一般化超幾何微分方程式 ヴォロス係数 接続公式 漸近展開 ストークス現象 ボレル変換 無限階微分作用素

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C-19、F-19、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究は完全 WKB 解析および関連する解析手法に基づいている。完全 WKB 解析は、大きなパラメータまたはその逆数として小さなパラメータをもつ関数方程式の解の大域解析に有効な方法として近年注目を集めている。WKB の名称は量子力学の黎明期に Schrödinger 方程式の近似解として Wentzel, Kramers, Brillouin の 3 名が用いた解析方法に由来する。未知関数の対数微分が満たす Riccati 型方程式の Planck 定数の冪による展開をもつ形式解の初項及び第 2 項を用いた近似解を用いて解の接続を論じ、Bohr-Sommerfeld の量子化条件を導出した。彼らの研究成果はその後の量子力学の発展の礎となった。ここで用いられた近似解の項を無限に増やした形式的冪級数解を考えると、それは一般に発散してしまうことが知られていた。そこで、その意味付けをいかに考えるかという問題が長年にわたり論じられたが、明確な答が得られないままであった。その解決策として、形式的冪級数解およびそのボレル和を用いた解析方法を見出したのが A. Voros, J. Ecalle, H. Silverstone である (引用文献 ①, ③, ④)。これらの研究を代数解析学の手法と結びつけてその本質を明らかにし、さらに発展させたのが F. Pham (引用文献②), M. Sato, T. Kawai, Y. Takei および報告者であり、従来の WKB 解析と区別して完全 WKB 解析の呼称が与えられた。

(2) 完全 WKB 解析の開始当初に得られた大きな成果として 2 階 Fuchs 型線形上微分方程式のモノドロミー行列計算が挙げられる。確定特異点の個数が 4 以上の場合に古典解析の手法では一般的にモノドロミー行列は計算不可能とされてきた。完全 WKB 解析を用いると、具体的に与えられた方程式に対して一般的な仮定の下で Stokes 曲線の描画ができればモノドロミー行列が計算できることが分かった。その後、完全 WKB 解析は高階線形常微分方程式、Painlevé 方程式およびその高階化などへの応用が研究され、様々な成果を挙げてきた。これらの研究では基本的に WKB 解、すなわち大きなパラメータの逆数で展開される形式的冪級数解およびその Borel 和を用いている。一方で、微分方程式の解としては特殊関数など、古典的によく知られたものが数多くある。これらの解析関数解と WKB 解の Borel 和の関係に注目したのが報告者による科研費研究課題「パラメトリック・ストークス現象の代数解析」(2014~2017) である。この研究においては超幾何微分方程式の原点で規格化された WKB 解と古典的超幾何関数の関係を明らかにした。この研究では Voros 係数と呼ばれる不変量の導出が重要な役割を果たしているが、その計算において形式的な無限階微分作用素が大きな役割を果たした。本研究はこれらを背景として始められた。

2. 研究の目的

本研究課題の申請時における研究目的は、主なものとして

- (1) 超幾何微分方程式および合流型超幾何微分方程式の WKB 解のボレル和と超幾何関数・合流型超幾何関数の標準的解の対応関係の記述
- (2) Heun 方程式および合流型 Heun 方程式の解析的解と WKB 解のボレル和の対応関係の記述
- (3) 一般超幾何関数、多変数超幾何関数の完全 WKB 解析

が挙げられた。また、(1), (3) と関わりの深い無限階微分作用素などの理論整備も関連する研究目的として設定された。

3. 研究の方法

研究対象とする微分方程式の WKB 解の規格化 (積分端点の選択) のうち、確定特異点での規格化、および単純変わり点での規格化が研究上重要である。前者は WKB 解の Borel 和と解析関数解との関係を付けるのに便利であり、後者は Borel 和の解析接続に用いられる。両者を結びつけるのが Voros 係数である。Voros 係数の具体的表示を得ることが研究目的に到達するために重要である。超幾何微分方程式および合流超幾何微分方程式に関しては、前研究課題において概ね結果が得られていたので、第一の目的に関しては WKB 解の Borel 和の分枝の精密な解析を行った。第三の目的については、一般化超幾何微分方程式に対する昇降演算子を活用して Voros 係数の計算を行った。第二の目的に対しては Heun 方程式に対する昇降演算子の存在が不明であるので、その存在の有無および昇降演算子に変わる手段を模索した。無限階微分作用素に関しては、位数を与えた整関数の空間に作用するものの特徴付けを係数の増大度評価から行った。

4. 研究成果

研究目的で挙げた項目 (1), (3) については概ね目標に到達したといえる結果が得られた. 関連する無限階微分作用素の基礎理論等に関してもいくつかの結果が得られた. 主なものは以下の通りである.

(1) 超幾何微分方程式・合流型超幾何微分方程式の WKB 解と超幾何関数・合流超幾何関数の関係の解明

Gauss の超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2w}{dx^2} + (c - (a+b+1)x)\frac{dw}{dx} - abw = 0.$$

の固有パラメータに大きなパラメータ η を $a = \alpha_0 + \alpha\eta, b = \beta_0 + \beta\eta, c = \gamma_0 + \gamma\eta$ の形で入れたものを考察する. $0 < \alpha < \gamma < \beta$ とする. 単純変わり点で規格化された WKB 解のうち原点で劣勢なものを φ_+ とし, 境界上に原点がある適当なストークス領域における Borel 和 (およびその解析接続) を $\Phi_+(x, \eta)$ とすると, 原点の近傍で

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \left(\frac{\Gamma(1+b-c)}{2\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)} \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma(c) e^{\frac{\pi i}{2}(a-\frac{1}{2})} \Phi_+$$

が成り立つ. ここで ${}_2F_1(a, b, c; x)$ は超幾何関数, Γ はガンマ関数である. 独立解についても類似の表示が得られた. また, パラメータ空間における余次元 1 の例外集合を除いた他の連結成分にたいしても同様の結果が成り立つ. Borel 和を φ_+ で置き替えた式は, 超幾何関数の $\eta \rightarrow \infty$ における漸近展開を与える. WKB 解のパラメータに関する Stokes 現象を記述する公式から超幾何関数のパラメータに関する Stokes 現象も明らかになった.

(2) 一般化超幾何微分方程式の原点および無限遠点における Voros 係数の具体形導出

一般化超幾何微分方程式とは, 一般化超幾何級数

$${}_N F_{N-1} \left(\begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix}; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_N)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_{N-1})_k k!} x^k$$

が満たす微分方程式

$$\left(\left(\prod_{j=1}^{N-1} (\vartheta_x + b_j) \right) \partial_x - \left(\prod_{i=1}^N (\vartheta_x + a_i) \right) \right) w = 0.$$

を指す. この方程式に含まれるパラメータに大きなパラメータ η を $a_i = a_{i,0} + a_{i,1}\eta$ ($i = 1, 2, \dots, N$), $b_j = b_{j,0} + b_{j,1}\eta$ ($j = 1, 2, \dots, N-1$), として導入すると Gauss の超幾何微分方程式 ($N = 2$ に当たる) の場合に類似して特異点と (j, k) 型変わり点に関する Voros 係数を定義できる. 原点および無限遠点の Voros 係数について具体的表示を得た. 例えば, 原点の Voros 係数は次で求められた:

$$V_0^{(j,k)} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} \eta^{1-\ell}}{\ell(\ell-1)} V_{0,\ell}^{(j,k)}.$$

ただし, 各項は

$$\begin{aligned} V_{0,\ell}^{(j,k)} = & \frac{B_\ell(b_{j,0}-1)}{b_{j,1}^{\ell-1}} - \frac{B_\ell(b_{k,0}-1)}{b_{k,1}^{\ell-1}} + \sum_{i=1}^N \frac{B_\ell(b_{k,0}-a_{i,0})}{(b_{k,1}-a_{i,1})^{\ell-1}} \\ & - \sum_{i=1}^N \frac{B_\ell(b_{j,0}-a_{i,0})}{(b_{j,1}-a_{i,1})^{\ell-1}} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{N-1} \frac{B_\ell(b_{j,0}-b_{m,0})}{(b_{j,1}-b_{m,1})^{\ell-1}} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N-1} \frac{B_\ell(b_{k,0}-b_{m,0})}{(b_{k,1}-b_{m,1})^{\ell-1}} \quad (k \neq N) \end{aligned}$$

などで与えられる. また $B_\ell(z)$ は Bernoulli 多項式である. この結果は, 一般化超幾何級数 ${}_p F_q$ が満たす微分方程式に対しても拡張され, 類似の結果が得られた. さらに, これらの Voros 係数の表示が一般超幾何微分方程式の退化図式と整合していることも確かめられた.

(3) 位数を与えた整関数の空間における連続線型作用素の特徴付け

1変数整関数 f で位数 $p > 0$ かつ $\tau > 0$ に対して

$$\|f\|_{p,\tau} := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \exp(-\tau|z|^p) < \infty$$

を満たすもの全体を $A_{p,\tau}$ とする。これは上のノルムにより Banach 空間となる。 $A_{p,\tau}$ の $\tau > 0$ についての帰納極限を A_p で表す。 A_p における連続線型写像 F は、整関数を係数とする無限階微分作用素 $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \partial_z^k$ で次の評価を満たすもので表される：任意の $\varepsilon > 0$ に対して $B > 0$, $C > 0$ が存在して

$$|a_k(z)| \leq C \frac{\varepsilon^k}{k!^{1/q}} \exp(B|z|^p) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

ただし、 $1/p + 1/q = 1$, $\partial_z = d/dz$ とする。逆に、このような無限階微分作用素は A_p に連続線型作用素として働く。 $A_{p,\tau}$ の $\tau > 0$ に関する射影極限 (minimal type) に対しても類似の結果が得られる。さらに、多変数への拡張も同様に得られる。また、位数の代わりに proximate order をもちいても定式化ができることも分かった。

(4) Airy 方程式に対する Voros の接続公式の初等的証明とその一般化

Airy の微分方程式の WKB 解に対する Voros の接続公式は、完全 WKB 解析における基本定理である。従来の証明は WKB 解の Borel 変換を超幾何関数で表して、その接続公式を用いるというものであった。当研究課題の研究成果 (1) では、完全 WKB 解析を超幾何微分方程式に対して適用している。超幾何関数の接続公式は古典理論であり、それを完全 WKB 解析の基礎付けに用いることは問題無いが、できることならば超幾何関数を用いずに証明したい、と考えるのは自然である。このような問題意識から出発して、超幾何微分方程式の WKB 解の Borel 変換が代数関数であることに着目して、代数関数の接続問題を初等的に解くことにより Airy の微分方程式の WKB 解に対する Voros の接続公式を証明した。この結果は Airy 関数を 2 変数に一般化した Pearcey 積分が満たすホロノミック系に対して類似の形で成り立つことが示された。

<引用文献>

- ① J. Ecalle, Cinq applications des fonctions résurgentes, Prépublications mathématiques d'Orsay **84**, Vol. 62, 1984.
- ② F. Pham, Resurgence, quantized canonical transformations, and multi-instanton expansions, Algebraic Analysis, Vol. II, Academic Press, 1988, pp. 699–726.
- ③ H. J. Silverstone, JWKB connection-formula problem revised via Borel resummation, Phys. Rev. Lett. **55**(1985), 2523–2526.
- ④ A. Voros, The return of the quartic oscillator. The Complex WKB method, Ann. Inst. Henri Poincaré, **39**(1983), 211–338.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計19件（うち査読付論文 19件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Aoki Takashi, Uchida Shofu	4. 巻 18
2. 論文標題 Voros Coefficients at the Origin and at the Infinity of the Generalized Hypergeometric Differential Equations with a Large Parameter	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 002, 23 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2022.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Aoki Takashi, Uchida Shofu	4. 巻 782
2. 論文標題 Degeneration structure of the Voros coefficients of the generalized hypergeometric differential equations with a large parameter	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 43-56
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/782/15721	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ihara Kentaro, Kusunoki Yusuke, Nakamura Yayoi, Saeki Hitomi	4. 巻 -
2. 論文標題 Generating function of multiple polylog of Hurwitz type	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Canadian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008414X22000621	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Idomoto Taiki, Suzuki Takao	4. 巻 112
2. 論文標題 An affine Weyl group action on the basic hypergeometric series arising from the q-Garnier system	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-022-01613-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Aoki, Mika Tanda and Toshinori Takahashi	4. 巻 32
2. 論文標題 Voros coefficients of the Gauss hypergeometric differential equation with a large parameter	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Integral Transforms and Special Functions	6. 最初と最後の頁 336-345
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/10652469.2020.1838504	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Aoki, Mika Tanda and Toshinori Takahashi	4. 巻 73
2. 論文標題 The hypergeometric function, the confluent hypergeometric function and WKB sokutions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1019-1062
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/84528452	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Aoki, Ryuichi Ishimura, Yasunori Okada, Daniele C. Struppa and Shofu Uchida	4. 巻 -
2. 論文標題 Characterization of continuous endomorphisms of the space of entire functions of a given order	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Complex Variables and Elliptic Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/17476933.2020.1767086	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takashi Aoki, Ryuichi Ishimura and Yasunori Okada	4. 巻 -
2. 論文標題 A differential operator representation of continuous homomorphisms between the spaces of entire functions of given proximate orders	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Complex Analysis and Operator Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11785-020-01031-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Aoki, K. Iwaki and T. Takahashi	4. 巻 62
2. 論文標題 Exact WKB analysis of Schoedinger equations with a Stokes curve of loop type	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 1-34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1619/fesi.62.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 T. Aoki, F. Colombo, I. Sabadini and D. C. Struppa	4. 巻 197
2. 論文標題 Continuity theorems for a class of convolution operators and applications to superoscillations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annali di Matematica	6. 最初と最後の頁 1533 - 1545
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-018-0736-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Aoki, F. Colombo, I. Sabadini and D. C. Struppa	4. 巻 5
2. 論文標題 Continuity of some operators arising in the theory of superoscillations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Quantum Studies: Mathematics and Foundations	6. 最初と最後の頁 463 - 476
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40509-018-0159-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計23件 (うち招待講演 16件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 青木貴史, 鈴木貴雄, 内田匠風 (登壇者)
2. 発表標題 Exact WKB analysis for the Pearcey system with a large parameter
3. 学会等名 日本数学会 2022秋期総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takashi Aoki
2. 発表標題 An elementary approach to the exact WKB analysis of the Pearcey system with a large parameter
3. 学会等名 RIMS Symposium Prospects in microlocal analysis and asymptotic analysis (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 青木貴史, 石村隆一, 岡田靖則 (登壇者)
2. 発表標題 整関数の空間における連続準同型の微分作用素表示
3. 学会等名 日本数学会 2023年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takao Suzuki
2. 発表標題 Cluster algebra and q-Painleve equation: higher order generalization and degeneration structure
3. 学会等名 Advances in Cluster Algebras 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yayoi Nakamura
2. 発表標題 A residue calculus for few variants of MZV
3. 学会等名 RIMS Symposium on Zeta functions and their representations (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takashi Aoki
2. 発表標題 A Kummer-WKB dictionary
3. 学会等名 Exact Quantization/Exact WKB and resurgence, ARA focus week, Isaac Newton Institute (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takashi Aoki
2. 発表標題 The return of “The Bender-Wu analysis and the Voros theory”
3. 学会等名 RIMS workshop (online) “Exact WKB analysis, microlocal analysis, Painleve equations and related topics” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takao Suzuki
2. 発表標題 A generalization of the q-Garnier system and its Lax form
3. 学会等名 The Twelfth IMACS International Conference, University of Georgia, Athens, GA (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takashi Aoki
2. 発表標題 The hypergeometric function and WKB solutions
3. 学会等名 15th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Aoki
2. 発表標題 A Kummer-WKB dictionary
3. 学会等名 RIMS Symposium (open) "Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takao Suzuki
2. 発表標題 Cluster algebra and q-Painleve; equations
3. 学会等名 China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takao Suzuki
2. 発表標題 Affine Weyl groups and Painleve; type systems
3. 学会等名 RIMS Symposium (open) "Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 青木貴史
2. 発表標題 Exact WKB analysis of the hypergeometric differential equation
3. 学会等名 研究集会「複素領域における微分方程式とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鈴木貴雄
2. 発表標題 クラスター代数と高階 q-パンルヴェ系
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「可積分系理論から見える数理構造とその応用」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takashi Aoki
2. 発表標題 Toward the exact WKB analysis of the generalized hypergeometric differential equation, I
3. 学会等名 RIMS Symposium (open) "Various Problems of Algebraic Analysis" (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takao Suzuki
2. 発表標題 Cluster algebra and generalized q-Painleve VI systems of type A
3. 学会等名 Symmetries and Integrability of Difference Equations (SIDE) 13 (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 青木貴史、内田匠風
2. 発表標題 Voros coefficient at the origin of the generalized hypergeometric differential equation with a large parameter
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会・函数方程式論分科会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	中村 弥生 (Nakamura Yayoi) (60388494)	近畿大学・理工学部・准教授 (34419)	
研究分担者	鈴木 貴雄 (Suzuki Takao) (60527208)	近畿大学・理工学部・准教授 (34419)	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	岡田 靖則 (Okada Yasunori)	千葉大学・理学研究院・教授 (12501)	
研究協力者	石村 隆一 (Ishimura Ryuichi)	千葉大学・名誉教授 (12501)	
研究協力者	内田 匠風 (Uchida Shofu)	日本大学・理工学部・助教 (32665)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------

米国	Chapman University			
----	--------------------	--	--	--