

令和 5 年 6 月 5 日現在

機関番号：11501
 研究種目：基盤研究(C) (一般)
 研究期間：2018～2022
 課題番号：18K03388
 研究課題名(和文) ブロッキング型及びアンチブロッキング型整数多面体の類似性と相違性に関する研究

 研究課題名(英文) Research on similarities and dissimilarities between the blocking and anti-blocking polyhedra

 研究代表者
 佐久間 雅 (Sakuma, Tadashi)

 山形大学・理学部・教授

 研究者番号：60323458
 交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：サイクルの2乗グラフの期待到達時間とフィボナッチ数との間の美しい関係を示し、Tutte多項式の一般化やPebble Motion Problemの一般化に成功。Ehard & Rautenbachの予想を覆し、点重み付き木におけるconnected safe set最小化問題がFPTASに属することを示す。Tittmann等[Eur J Combin 32, 2011]の未解決問題の一つを解決。Cornuejols, Guenin and Margotの予想の部分的解決。世界で初めてTutte polynomialの $(x, y) = (2, -1)$ における値に組合せ論的解釈を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
 離散数学の幅広い分野において(期待到達時間、Tutte多項式、Pebble Motion Problem、Safe Set Problem、Clutter Packing and Covering Problemなど)に対し、複数の未解決問題を解決し、既存の枠組みの一般化を行った。特筆すべき結果としては、世界で初めてTutte polynomialの $(x, y) = (2, -1)$ における値に組合せ論的解釈を与えたことなどが挙げられる。

研究成果の概要(英文)：Proved a beautiful relationship between the expected arrival time of the squared graph of cycles and the Fibonacci number, generalizing the Tutte polynomial and the Pebble Motion Problem; overturned Ehard & Rautenbach's conjecture of connected safe set minimization in point weighted trees. Showed that the problem belongs to FPTAS, solving one of the open problems of Tittmann et al [Eur J Combin 32, 2011]; partial solution of a conjecture of Cornuejols, Guenin and Margot; first in the world to show that the Tutte polynomial problem belongs to FPTAS. Gives, for the first time in the world, a combinatorial interpretation for the Tutte polynomial at $(x, y) = (2, -1)$.

研究分野：離散数学、組合せ最適化

キーワード：期待到達時間 フィボナッチ数列 Tutte多項式 Pebble motion problem safe set problem Packing and Covering

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(0,1)-Matrices により規定される、Anti-Blocking Type の不等式系と、Blocking Type の不等式系との深遠なアナロジーの解明は、1960 年代の Fulkerson や Edmonds、Lehman、Lovász、Padberg 等の輝かしい一連の研究を端緒として、現在も大きく研究が進展し続けている組合せ最適化分野のプリンシパルな研究領域である。

2002 年 5 月 Cornuéjols や Seymour 等によって、一般の Anti-Blocking Type TDI 不等式系の禁止構造型の定理と分解定理が得られた。すなわち強理想グラフ予想(略して SPGC) の肯定的解決である。ただし、彼らの証明は長く煩雑であり、簡潔な別証明を求める取り組みが続けられている。この方向における代数的なアプローチとしては、clique matrix が circulant になる partitionable graph (near factorization) を特徴付ける、いわゆる Grinstead の予想が有名であるが、依然として未解決である。一方の Blocking Type 不等式系の整数性や TDI 性の特徴付けに関しては、未だその本質的な部分が未解明である。実際、Anti-Blocking Type の不等式系の TDI 性を特徴付ける Replication Lemma については、既に 1972 年の L. Lovász による弱理想グラフ定理の証明の中で示されているが、Blocking Type において同様の命題が成立するであろうという、いわゆる Conforti & Cornuéjols の予想(「クラッターの MFMC 性と packing property は、等価な概念である。」)は、依然として、組合せ最適化分野における最も重要な未解決問題のままである。一方、佐久間雅(研究代表者)を中心とする研究グループ(連携研究者: 柏原賢二、中村政隆、八森正泰、藤田慎也、研究協力者: 篠原英裕)は、1990 年代後半から今日に至るまで、当該研究領域において一連の重要な貢献をしている。こうした中、最近になって、当該グループによる 3 つの成果が得られた。その一つは、Conjecture 2 に対する柏原賢二と佐久間雅による解決スキームの定式化に基づく研究の進展であり、他の一つは佐久間雅と篠原英裕による「S. Szabó & A.D. Sands の問題」(Grinstead の予想の部分予想)及びその Blocking Type counter-part の完全解決(2013 年: EuroComb2013, 2014 年: Journal of Algebraic Combinatorics)に基づく研究手法の発展である。更に佐久間雅は、2016 年 3 月に Conforti & Cornuéjols の予想を包含する Conjecture 3 を定式化した。(なお、この予想(Conjecture 3)の言明および定式化の詳細は、closed な preprint として本研究課題の連携研究者に開示されている。)

2. 研究の目的

本研究においては、上記の結果を受け、以下に記載する一連の予想の完全解決を究極の目標として、計算機による数値実験、super-conjecture や sub-conjecture の定式化及びその証明を行い、Anti-Blocking 型と Blocking 型の双方の整数多面体に普遍する新たな構造定理を抽出し、更に関連する様々な離散構造、組合せ最適化問題に対しても果敢に挑戦するなどの取り組みを行う。

3. 研究の方法

柏原& 佐久間は、Conjecture 2 を 2 つの部分問題に分割して解くことを提案している。ideal minimally non-packing clutter には tilde core という中心構造が存在する。tilde core の主要な性質のすべてを満たすような clutter を tilde clutter と呼ぶ。実際に、ごく限られた clutter のクラスしか、tilde clutter になり得ないこと、つまり、tilde clutter の良い特徴付けを与えるのが、第 1 の問題である。次のステップとして、blocking number が 3 以上の tilde clutter の任意の系列に対して、それらを core として持つような ideal minimally non-packing clutter が存在しないことを示していく作業が必要となる。これが第 2 の問題である。研究代表者の佐久間雅は現在、連携研究者の柏原賢二と協力しながら、当該手法を用いた取り組みを行っており、このクラスについて特徴付けを完成させるのが当面の目標である。その他、当該分野やその周辺分野の重要な未解決問題に対して、計算機による数値実験など、様々な手法を駆使して果敢に挑戦する。

4. 研究成果

以下に主要な成果を年度の新しい順に記す。

(1) 国際会議における招待講演:

T. Sakuma, "Network majority and the connected safe set problem", International Symposium on Computational Operations Research and Algorithmic Game Theory, at Indian Statistical Institute Delhi Centre (On Line), India, March 29-31, 2021.

(2) 査読付き国際雑誌掲載論文:

1. T. Kato, T. Nakamigawa, T. Sakuma. "Pebble exchange group of graphs", European Journal of Combinatorics, 95 (2021), No.103325, 11 pages.
pebble motion problem の既存の成果を包含する新たな一般化を与えた。

2. S. Fujita, B. Park, T. Sakuma. "Stable structure on safe set problems in vertex-weighted graphs", European Journal of Combinatorics, 91 (2021), No.103211, 23 pages.

safe number と connected safe number が常に一致するクラスを 2 部グラフ上で特徴づけた。この結果は、safe set の一般構造を調べる上で極めて重要な成果である。

3. M. Kume, T. Miezaki, T. Sakuma, H. Shinohara. “Tutte polynomial, complete invariant, and theta series”, *Graphs and Combinatorics* (2020), 14 pages.
Tutte Polynomial の一般化を扱った論文である。

4. S. Fujita, B. Park, T. Sakuma. “Stable Structure on Safe Set Problems in Vertex-weighted Graphs II - Recognition and Complexity - ” In: *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science: 46th International Workshop, WG 2020, Leeds, UK, June 24 – 26, 2020, Revised Selected Papers*, *Lecture Notes in Computer Science*, 12301 (2020), Springer Verlag, pp.364-375.

Ehard & Rautenbach の予想[*Discrete Applied Mathematics*, 2020] を覆し、点重み付き木における minimum connected safe set の同定が FPTAS に属することを示した。この成果は、2020 年の国際会議 WG(採択率 32/94) に採択された。

5. N. Matsumoto, T. Nakamigawa, T. Sakuma. “Convex grabbing game of the point set on the plane”, *Graphs and Combinatorics*, 36(1) (2020), pp.51-62.
凸幾何的 gold grabbing game を定義し、その性質を調べた。

6. T. Miezaki, M. Oura, T. Sakuma, H. Shinohara. “A generalization of the Tutte polynomials”, *Proceedings of the Japan Academy, Ser. A Mathematical Sciences*, 95(10) (2019), pp.111-113.

Tutte Polynomial を一般化し、マトロイドに対する多項式完全不変量を初めて定義した。

7. S. Fujita, T. Jensen, B. Park, and T. Sakuma. “On the weighted safe set problem on paths and cycles”, *Journal of Combinatorial Optimization*, 37(2) (2019), pp.685-701.

サイクルグラフの safe number と connected safe number が任意の頂点重み関数の下で等しくなることや重みつきサイクル上の safe set 最小化問題が $O(n)$ であることを示し、かつ Tittmann 等[*Eur J Combin* 32, 2011]の未解決問題の一つを解決。

8. K. Kashiwabara and T. Sakuma. “On ideal minimally non-packing clutters”, In: S.K. Neogy, R.B. Bapat and D. Dubey (eds) *Mathematical Programming and Game Theory*, Springer Research Monograph (Indian Statistical Institute Series) (2018), pp.67-86.

Cornuejols, Guenin and Margot の予想に対する証明手法を提案し、combinatorial affine planes における当該予想を解決。

9. R. Agueda, N. Cohen, S. Fujita, S. Legay, Y. Manoussakis, Y. Matsui, L. Montero, R. Naserasr, H. Ono, Y. Otachi, T. Sakuma, and Z. Tuza. “Safe set in graphs: Graph classes and structural parameters”, *Journal of Combinatorial Optimization*, 36(4) (2018), pp.1221-1242.

点重み無しの safe set 最小化問題が、treewidth が制限されたグラフの族において多項式時間で計算可能であること等を示した。

10. T. Nakamigawa and T. Sakuma. “The expansion of a chord diagram and the Tutte polynomial”, *Discrete Mathematics*, 341 (2018), pp.1573-1581.

世界で初めて Tutte polynomial の $(x, y) = (2, -1)$ における値に組合せ論的解釈を与えた。

11. R.B. Bapat, S. Fujita, S. Legay, Y. Manoussakis, Y. Matsui, T. Sakuma, and Z. Tuza. “Safe sets, network majority on weighted trees”, *Networks*, 71 (2018), pp.81-92.

(connected) safe number がネットワーク上での多数決概念(過半数性)を規定する指標であることを指摘し、掲載誌(*Networks*)上のダウンロード数トップ 20 位内(2016年7月から2018年6月迄)にランキングされる。当該論文は、この雑誌のインパクトファクターを押し上げる(5.12)ことに貢献した旨、当該雑誌から表彰された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Doi Yoshiaki, Konno Norio, Nakamigawa Tomoki, Sakuma Tadashi, Segawa Etsuo, Shinohara Hidehiro, Tamura Shunya, Tanaka Yuuho, Toyota Kosuke	4. 巻 313
2. 論文標題 On the average hitting times of the squares of cycles	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 18 ~ 28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2022.01.001	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kato Tatsuki, Nakamigawa Tomoki, Sakuma Tadashi	4. 巻 95
2. 論文標題 Pebble exchange group of graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 103325 ~ 103325
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejc.2021.103325	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fujita Shinya, Park Boram, Sakuma Tadashi	4. 巻 91
2. 論文標題 Stable structure on safe set problems in vertex-weighted graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 103211 ~ 103211
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejc.2020.103211	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kume Misaki, Miezaki Tsuyoshi, Sakuma Tadashi, Shinohara Hidehiro	4. 巻 online
2. 論文標題 Tutte Polynomial, Complete Invariant, and Theta Series	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-020-02238-w	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Shinya, Park Boram, Sakuma Tadashi	4. 巻 91
2. 論文標題 Stable structure on safe set problems in vertex-weighted graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 103211 ~ 103211
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejc.2020.103211	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujita Shinya, Park Boram, Sakuma Tadashi	4. 巻 12301
2. 論文標題 Stable Structure on Safe Set Problems in Vertex-Weighted Graphs II --Recognition and Complexity--	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 364 ~ 375
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-60440-0_29	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miezaki Tsuyoshi, Oura Manabu, Sakuma Tadashi, Shinohara Hidehiro	4. 巻 95
2. 論文標題 A generalization of the Tutte polynomials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 111 ~ 113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.95.111	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Matsumoto , Tomoki Nakamigawa & Tadashi Sakuma	4. 巻 36
2. 論文標題 Convex Grabbing Game of the Point Set on the Plane	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 51 ~ 62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-019-02117-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinya Fujita, Boram Park & Tadashi Sakuma	4. 巻 In press
2. 論文標題 Stable structure on safe set problems in vertex-weighted graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 In press
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujita Shinya, Jensen Tommy, Park Boram, Sakuma Tadashi	4. 巻 37
2. 論文標題 On the weighted safe set problem on paths and cycles	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Optimization	6. 最初と最後の頁 685 ~ 701
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10878-018-0316-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 ?gueda Raquel, Cohen Nathann, Fujita Shinya, Legay Sylvain, Manoussakis Yannis, Matsui Yasuko, Montero Leandro, Naserasr Reza, Ono Hirotaka, Otachi Yota, Sakuma Tadashi, Tuza Zsolt, Xu Renyu	4. 巻 36
2. 論文標題 Safe sets in graphs: Graph classes and structural parameters	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Optimization	6. 最初と最後の頁 1221 ~ 1242
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10878-017-0205-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nakamigawa Tomoki, Sakuma Tadashi	4. 巻 341
2. 論文標題 The expansion of a chord diagram and the Tutte polynomial	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1573 ~ 1581
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2018.02.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Bapat Ravindra B., Fujita Shinya, Legay Sylvain, Manoussakis Yannis, Matsui Yasuko, Sakuma Tadashi, Tuza Zsolt	4. 巻 71
2. 論文標題 Safe sets, network majority on weighted trees	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Networks	6. 最初と最後の頁 81 ~ 92
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/net.21794	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kashiwabara Kenji, Sakuma Tadashi	4. 巻 3
2. 論文標題 On Ideal Minimally Non-packing Clutters	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematical Programming and Game Theory. Indian Statistical Institute Series.	6. 最初と最後の頁 67 ~ 86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-13-3059-9_4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計3件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Tadashi Sakuma
2. 発表標題 Network majority and the connected safe set problem
3. 学会等名 International Symposium on Computational Operations Research and Algorithmic Game Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 土井義耀, 中上川友樹, 佐久間雅, 瀬川悦生, 篠原英裕, 田中優帆, 田村駿也, 豊田晃典
2. 発表標題 サイクル の二乗グラフ上の乱歩における期待到達時間の解析
3. 学会等名 応用数学合同研究集会報告集(2019) #D033, 7pages.
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tadashi Sakum
2. 発表標題 Pebble exchange group of graphs
3. 学会等名 The 6th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究者詳細 論文-佐久間雅 https://yudb.kj.yamagata-u.ac.jp/html/240_ronbn_1_ja.html 山形大学研究者情報-研究者詳細-研究活動 http://yudb.kj.yamagata-u.ac.jp/html/240_ja.html</p>
--

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	Ajou University			
韓国	Ajou University			
韓国	Ajou University			
ハンガリー	MTA Renyi Institute	University of Pannonia		
インド	Indian Statistical Institute			

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	Shandong University			
フランス	LRI, University Paris-Sud	LIAFA, University Paris-Diderrot		
韓国	Ajou University			