

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 5 月 29 日現在

機関番号：33917

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K11204

研究課題名(和文) 多重比較法の発展的理論の研究

研究課題名(英文) The progressive theory of multiple comparison procedures

研究代表者

白石 高章 (Shiraishi, Taka-aki)

南山大学・理工学部・教授

研究者番号：50143160

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：繰り返しのある二元配置モデルや多群2次元正規モデルにおいて、主効果の多重比較法や相関係数の多重比較法として、シングルステップ法と閉検定手順を提案し、閉検定手順がシングルステップ法を優越することを示した。分散の等しい多群正規モデルで、平均母数に傾向性の制約のある場合に、これまでの多重比較法を優越する閉検定手順を提案し、サイズが不揃いの場合も適応できることを示した。帰無仮説の族に優先順位がつけられているときに直列型ゲートキーピング法とよばれる閉検定手順による多重比較検定が Maurer et al. (1995) によって提案されているが、これらを優越するゲートキーピング法を提案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

分散分析法では、位置母数の一様性の検定がおこなわれるが、位置母数の間の違いを具体的に指摘できない。また、信頼領域であたえられるため明確な違いを指摘できない。これに対し多重比較法は、どの位置母数の間に違いがあるか指摘できる。このため、生物医学心理学などの分野で、多重比較法を教育しデータ解析に用いられている。本研究では、2元配置モデルにおける位置母数や2次元正規モデルにおける相関係数の多重比較法の解明が行われた。さらにこれまでのゲートキーピング法を優越する手法が提案できた。本研究で提案された手法は、多くのデータ解析に適用できる。

研究成果の概要(英文)：We proposed a single-step method and a closed test procedure as multiple comparison procedures for main effects in two-way models and multiple comparison procedures among correlation coefficients in multi-sample bivariate normal models. The proposed procedures are shown to be superior to previous multiple comparison methods. Maurer et al. (1995) proposed gatekeeping procedures based on Bonferroni's inequality. In multi-sample multivariate normal models, we proposed gatekeeping procedures based on the max value of t-statistics and based on chi-square statistics. The proposed gatekeeping procedures were superior to Maurer et al. (1995). Furthermore, nonparametric gatekeeping procedures were discussed.

研究分野：統計科学

キーワード：多重比較法 閉検定手順 パラメトリック法 ノンパラメトリック法 漸近理論

### 1. 研究開始当初の背景

ある要因 A があり、k 個の水準を考える。I 番目の水準における標本の観測値 ( $X_{i1}, X_{i2}$ ) は第 i 群とよばれる。 $X_{ij}$  は同一の分布関数  $F_i(x)$  をもつとし、平均を  $\mu_i$  とする。

$F_i(x)$  が正規分布の分布関数を仮定する。このとき、平均の一般性の帰無仮説  $H_0$  を検定する場合、分散分析法では F 検定が行われる。しかしながら、一般性の帰無仮説  $H_0$  を棄却できても、どの群の平均とどの群の平均の間に相違があるかを検出できない。

これに対し、多重比較法とよばれる検定と同時区間推定は、どの 2 つの群の間にどのくらい違いがあるかを検出できる。次に  $F(x)$  を平均が 0 の連続型分布関数とし、 $F_i(x) = F(x - \mu_i)$  を仮定した場合のノンパラメトリックモデルの理論を構築することが多い。上記の連続モデル以外の重要な場合として、 $F_i(x)$  をベルヌーイ分布とした比率モデルや  $F_i(x)$  をポアソン分布としたポアソンモデルの多重比較理論はこれまで満足できる結果が他の研究者によって得られていない。正規分布を仮定し、すべての平均相違の多重比較法として、シングルステップの多重比較検定法を Tukey (1953) and Kramer (1956) は提案し論じた。 $F(x)$  が標準正規分布のときに、すべての平均差の同時信頼区間もよく知られている。これらの方法は正規理論に基づくパラメトリックな多重比較法である。Hochberg and Tamhane (1987) の文中で、シングルステップの多重比較検定を改良するテューキー・ウェルシュの方法や REGW 法ペリの方法等の閉検定手順が紹介されているが、これらの閉検定手順を改良した(検出力の高い)パラメトリックな閉検定手順を白石 (2011c) は論じ、白石 (2011a) の専門書の中で詳しく解説した。連続分布のモデルで、平均に順序制約がある場合のすべての平均相違に関する多重比較理論を白石 (2014c) は提案し、Hayter (1990) の方法を一般性に優越していることを数学的に示した。さらに白石・杉浦 (2015b) は、sinc 関数による数値解析学の理論により、白石 (2014c) が提案した多重比較検定法の有意水準点を求める近似の良い方法を開発し論じた。

連続分布モデルで順序制約のある場合の多重比較法を、白石 (2014b)、Hayter (1990) と Williams (1971) は提案しているが、サイズが等しい場合にのみ適用可能である。この制約は、2 群間の検定統計量の最大値の統計量を使用したことから起因する。Robertson et al. (1988) で述べられているカイ自乗分布の重み和に従う統計量を使うことにより、サイズが不揃いの場合も適用可能な対照群との比率相違に対する多重比較法を、白石・松田 (2015a) は提案し検出力の良さを論じた。さらに、白石・松田 (2016b) は、サイズが不揃いの場合も適用可能なすべての平均相違に対する多重比較法を論じた。

白石・松田 (2015a) が提案した手法は、カイ自乗分布の重み和に従う統計量の上側 % 点を求める必要があり、数値解析の専門家でない解析プログラムを書き実装することが難しい。サイズが不揃いの場合も適用可能で実装が容易である手法を提案する問題が発生する。

### 2. 研究の目的

多群モデルで正規分布を仮定した平均母数に順序制約のある場合の (3) のすべての平均相違のシングルステップの多重比較法として Hayter (1990) は  $StS$  統計量の最大値を基にして手法が提案されているが標本サイズが等しい仮定が必要である。白石 (2014c) は Hayter (1990) の方法を優越する閉検定手順を論じたが、標本サイズが等しいの条件を緩めることができなかった。白石・松田 (2015a)、(2016b) は標本サイズが不揃いの場合も適用できるカイバー自乗統計量を基にした閉検定手順を提案したが、手法が複雑で高度な数値計算が必要である。手法が複雑でなく、標本サイズが不揃いの場合も適用できる方法として、Page (1963) 型と Tamhane, Hochberg and Dunnett (1996) 型の線形統計量を基にした閉検定手順を考案することにした。順序制約のある場合の多重比較法は Williams (1971) と Hayter (1990) が有名であり、それ以外の手法として、Lee and Spurrier (1995) があるが、白石が提案してきた多重比較法はこれまで提案されてきている手法を優越している。さらに、優越性の数学的証明を白石は行っている。線形統計量を基にした閉検定手順を数学的に解明することにより、これまで提案されてきた手法を進化させることができる。

多次元分布モデルにも適用可能なゲートキーピング法として Maurer et al. (1995) によって提案されている。Bonferroni の方法や Holm (1979) の方法による理論が用いられている。これらの手法は検出力の低い方法であるため、これまで白石が提案してきた検出力の高い方法のゲートキーピング法を提案し理論構築を行う。

相関係数の多重比較論は、ボンフェローニによる検出力の低い方法しか提案されていなかった。この研究で、検出力の高い相関係数の多重比較論を構築する。

### 3. 研究の方法

研究業績の白石 (2014b) の中で、平均に順序制約のある場合のモデルにおける多重比較検定として、ヘイターの多重比較検定 (Hayter (1990)) よりも一般性に検出力の高い閉検定手順による多重比較検定を、白石 (2014c) は、提案できた。白石・杉浦 (2015b) は、数値解析学でよく知られている sinc 関数を使って、順序制約がある場合の主要な多重比較検定法の有意水準点を求めるア

ルゴリズムを数学的に解明した。順序制約のある場合の多重比較法はいくつかの  $t$  検定統計量の最大値の分布を基に構成されている。このため群サイズが等しい条件が必要である。多重比較検定として、群サイズが不揃いの場合も適用できる Rbertson, Wright, and Dykstra (1988, Wiley & Sons)で紹介されているカイバー自乗統計量を使った閉検定手順を白石・松田(2015a), (2016b)は提案し、その閉検定手順は、白石(2014c)の方法よりも検出力が高いことを示した。以上の独自の閉検定手順の理論を基に、以下 I から V の問題解決を行った。

I. 観測値が連続分布に従うモデルに対して、ノンパラメトリック多重比較法として Page (1963)による線形順位検定に基づく閉検定手順を提案する。この統計量の漸近分布は標準正規分布となり単純な手法で、標本サイズが不揃いであっても理論を構築できる。さらに、観測値が正規分布に従うモデルに対して、パラメトリック多重比較法として Page (1963)による線形順位検定に類似である線形型の  $t$  検定統計量に基づく閉検定手順を提案した。この場合も標本サイズの制約を受けない理論を構築する。Tamhane, Hochberg and Dunnett (1996)も線形型の検定統計量による多重比較法を考察している。

II. 連続モデルではない比率モデルとして、観測値の和が2項分布に従っているとし、比率母数に順序制約のある場合に、白石(2014a)は、母比率の間の多重比較検定と母比率の相違に関する同時信頼区間を論じた。この場合も標本サイズが等しい条件が必要であった。すべての母比率の相違に対する多重比較法として、漸近的に標準正規分布に従う分散安定化変換による線形型統計量を基に閉検定手順を提案できた。この場合標本サイズは不揃いであってもかまわない。

III. Shiraishi and Matsuda (2017)の中で、正規分布を仮定した繰り返しのない場合の2元配置モデルである乱塊法モデルにおけるすべての処理効果の相違に対して  $\chi^2$  統計量を使った多重比較法の理論を構築した。この乱塊法モデルにおける対照群と処理群における多重比較法として、Williams (1971)の方法と類似の手法よりも優れた手法を提案した。さらに、交互作用のある二元配置モデルにおける多重比較法も提案した。

IV. 地震などの稀にしか起こらない発生数に関する確率はポアソン分布に従っている。ポアソンモデルにおける多重比較法は、データ解析を行う上で重要な事項であるが、いまだに開発が進展していない。多群ポアソンモデルにおける多重比較法の開発と理論の構築を行った。白石(2014c)などを使って理論を構築できるが、出来る限り良い手法の開発を目指した。さらに、地震の時間に関する分布である指数分布についての多重比較法にも発展させ論じた。

V. 多次元分布モデルにも適用できるゲートキーピング法について1次元の白石が提案してきた1次元モデルの多重比較法を基に理論構築を行った。

#### 4. 研究成果

繰り返しのある二元配置モデルにおける行または列の主効果の一様性の帰無仮説に対する検定として、分散分析法ではF検定が使われる。このF検定によって帰無仮説が棄却されてもどの主効果の間に違いがあるか検出できない。行または列のすべての主効果の相違に対するシングルステップの多重比較法として、Tamhane (2009)はチューキー型の同時信頼区間を論述している。この同時信頼区間を基に、シングルステップのチューキー型多重比較検定を導くことは可能である。チューキー型多重比較検定を優越するマルチステップの多重比較検定法として、いくつかの  $t$  検定統計量の絶対値の最大値を基にした閉検定手順を提案した。この閉検定手順がシングルステップのチューキー型多重比較検定を優越する十分条件を与え、この閉検定手順から生成される主効果の同時信頼領域がチューキー型の同時信頼区間に一致していることを示した。更に、F検定統計量を基にした閉検定手順も論述した。次に、分散の等しい  $k$  群正規モデルで、平均母数に傾向性の制約のある場合に、一様性の帰無仮説に対する尤度比検定が Bartholomew (1959, 1961)に紹介されている。傾向性の制約の下で群サイズが等しい場合に、すべての平均相違の多重比較検定として Hayter (1990)は、いくつかの  $t$  統計量の最大値を基にしたシングルステップの多重比較法を論じた。繰り返しのある二元配置モデルにおける行または列の主効果に対するシングルステップのヘイター型の多重比較法を提案することができた。さらに、閉検定手順を提案でき、この閉検定手順がこのヘイター型の多重比較検定を優越する十分条件を導くことができた。また、閉検定手順も提案した。提案した閉検定手順の検出力とシングルステップの多重比較検定法の検出力を計算機シミュレーションにより優劣を検証し、特長を述べた。

帰無仮説の族  $F_p = \{H_{p,j} \mid j=1, \dots, m_p\}$  ( $p=1, \dots, q$ ) に優先順位がつけられているときに直列型ゲートキーピング法とよばれる閉検定手順による多重比較検定が Maurer et al. (1995)によって提案されている。Bonferroniの方法やHolm (1979)の方法による理論が用いられている。本研究では、観測値が  $q$  次元連続分布に従う  $k$  標本モデルを考えた。  $k$  個の平均ベクトルの第  $p$  成分の間のすべての相違を多重比較するための帰無仮説の族を  $H(p)$  ( $p=1, \dots, q$ ) とし、帰無仮説の族  $H(1), \dots, H(q)$  に優先順位がつけられているとした。多次元正規分布の下でのパラメトリック法として最大値  $t$  検定統計量に基づく閉検定手順を用いた直列型ゲートキーピング法を提案した。ダネット型多重比較検定を用いた直列型ゲートキーピング法を提案することもできる。シングルステップよりもマルチステップの閉検定手順を使用した方が検出力は高かった。Maurer et al. (1995)のゲートキーピング法に沿うと、Bonferroniの方法またはHolm (1979)の方法に替えたゲートキーピング法となるが、この方法は、ここで提案した手法よりもはるかに検出力が低い。提案した手法は、帰無仮説の族  $H(1), \dots, H(q)$  の

順で検定が行われていくが、途中の  $H(p)$  ( $1 < p < q$ ) の中の 1 つでも棄却できないと、以後の帰無仮説の族  $H(p+1), \dots, H(q)$  の検定は行われないが、 $H(1), \dots, H(q-1)$  の帰無仮説がすべて棄却されるときに最もうまく機能する方法である。さらに、分布に依存しないノンパラメトリック多重比較検定として、順位に基づくゲートキーピング法も提案された。

$k$  標本 2 次元正規分布モデルを考えた。この場合、各標本の平均と分散は未知で同一である必要のない場合に、 $k$  個の相関係数の多重比較法について研究を行なった。1 標本 2 次元正規分布モデルの相関係数の解析にはフィッシャーの  $z$  変換による統計量が使われる。この  $z$  変換による統計量の漸近正規性は Anderson (2003) に書かれているが、それとは異なる証明を与えた。この漸近理論を基に、分散共分散行列が未知の 2 次元正規分布に従う  $k$  標本モデルにおける相関係数を多重比較する手法について提案した。1 つ目の論文として、 $k$  個の相関係数の同時信頼区間、シングルステップのすべての相関係数の多重比較検定、マルチステップの多重比較検定の理論を構築し、その理論を基に良い手法の提案を行った。さらに、これらの手法を適用したデータ解析の例として、脊椎動物の全長と寿命の相関係数を解析した。観測値が未知の分散で同一である正規分布に従う  $k$  群モデルにおけるすべての平均相違の多重比較法が白石 (2011a) によって論じられている。また、正規分布の下で平均に順序制約のある場合の母平均の多重比較法は白石・杉浦 (2018) によってレビューされている。2 つ目の論文では観測値が 2 次元正規分布に従う  $k$  標本モデルにおいて、分散共分散行列が未知の 2 次元正規分布に従う  $k$  標本モデルにおける相関係数の相違を多重比較する手法について提案した。これらの手法は、1 つ目の論文の論文とは異なる  $k$  個の相関係数の差の同時信頼区間、相関係数相違に対するシングルステップの多重比較検定、マルチステップの多重比較検定であった。

以上の多標本相関係数の推測は、多重比較法としては他の研究者が手を付けていないはじめての理論であり手法であった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T. Shiraiishi	4. 巻 22
2. 論文標題 Hybrid Serial Gatekeeping Procedures for All-Pairwise Comparisons in Multi-Sample Models	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Academia. Sciences and engineering : journal of the Nanzan Academic Society	6. 最初と最後の頁 89-105
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.15119/00003944	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 白石高章	4. 巻 21
2. 論文標題 多次元多標本モデルにおける対照群との比較のための直列型ゲートキーピング法	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 南山大学紀要『アカデミア』理工学編	6. 最初と最後の頁 77-91
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.15119/00003085	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shiraiishi, T. and Matsuda, S.	4. 巻 40
2. 論文標題 Nonparametric closed testing procedures for all pairwise comparisons in a randomized block design	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japanese J. Biometrics	6. 最初と最後の頁 1-14
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5691/jjb.40.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 白石高章, 松田真一	4. 巻 49
2. 論文標題 繰り返しのある二元配置モデルにおけるすべての主効果の相違比較の開検定手順	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 日本統計学会和文誌	6. 最初と最後の頁 1-21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.11329/jjssj.49.1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 白石 高章, 松田 真一	4. 巻 48
2. 論文標題 繰り返しのある二元配置モデルにおけるすべての主効果の相違比較の閉検定手順	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 日本統計学会誌	6. 最初と最後の頁 総ページ数20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計3件

1. 著者名 Taka-aki Shiraiishi	4. 発行年 2022年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 128
3. 書名 Multiple Comparisons for Bernoulli Data	

1. 著者名 Shiraiishi, T., Sugiura, H. and Matsuda, S.	4. 発行年 2019年
2. 出版社 Springer International Publishing	5. 総ページ数 102
3. 書名 Pairwise Multiple Comparisons-Theory and Computation	

1. 著者名 白石 高章、杉浦 洋	4. 発行年 2018年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 312
3. 書名 多重比較法の理論と数値計算	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------