

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13400

研究課題名（和文）リーマンゼータ関数およびその導関数の零点と離散的な値の分布

研究課題名（英文）Zeros and discrete value distribution of the Riemann zeta function and its derivatives

研究代表者

スリアジャヤ アデイルマ (Suriajaya, Ade Irma)

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：50804241

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：リーマンゼータ関数の零点の分布は素数の分布を描写することで、整数論分野の重要な研究対象の一つである。課題の交付期間内に、リーマンゼータ関数の零点だけではなく、値の分布、導関数の零点の分布、一般のゼータ関数とL関数の値の分布を考察した。また数論的問題との関係で、ゴールドバッハ問題と小区間における素数の分布との関係も明らかにした。それだけではなく、ランダム行列論に係る零点分布の問題や、一般化されたオイラーの関数や離散的な半群の値の差の負冪の和との関係も明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究代表者らが得た研究成果は社会への直接的な応用が困難であるが、数論分野の発展に大きく貢献した。いくつかの結果に対してのみ紹介する。ゼータ関数とL関数の各々値分布の結果によって、ゼータ関数とL関数の挙動に関する理解が深まり、数論的問題への新たな応用に繋がる可能性もある。研究代表者らの研究でゴールドバッハ表現の個数の平均と素数定理の誤差は密接に関係しているのが明らかになったため、よりたくさん知られている素数の情報を用いてゴールドバッハ表現の個数の平均に対して挙動を調べることが可能になった。研究代表者らは更に、これらの問題と重要なリーマンゼータ関数の零点の対相関の関係を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：The Riemann zeta-function is an important function that solves number theoretical problems, starting from counting prime numbers. During the period of research, we considered not only the distribution of zeros of the Riemann zeta-function, but also distribution of values in various settings, distribution of zeros of its derivatives, and also distribution of values of general zeta and L-functions. In terms of its connection to number theoretical problems, we also considered its connection to Goldbach's problem and distribution of prime numbers in short intervals. Not limited to those results, we also studied a generalized Euler phi-function and a sum of negative degrees of the gaps values in numerical semigroups in connection to the Riemann zeta-function.

研究分野：解析的整数論

キーワード：ゼータ関数 零点 値分布 L関数 素数定理 ゴールドバッハ表現 例外的零点 数論的関数

1. 研究開始当初の背景

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ は $\text{Re}(s) > 1$ に対して無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ で定義される \mathbb{C} 上有理型関数であり、整数論の問題を調べるための重要な道具の一つである。特に、 $\zeta(s)$ の零点 ($\zeta(\rho) = 0$ となる点 ρ) は素数の分布と密接に関係し、興味深い研究対象となった。 $\zeta(s)$ は $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) < 0\} \cup \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 1\}$ において、負の偶数点 $s = -2, -4, -6, -8, \dots$ においてのみ零点を持ち、これらの零点は $\zeta(s)$ の解析的な性質により直ちに導けるため、「自明な零点」と通称される。一方、それら以外の零点は帯領域 $0 < \text{Re}(s) < 1$ 内に存在し、直線 $\text{Re}(s) = 1/2$ 及び実数軸 $\text{Im}(s) = 0$ に対して対称的に存在すること以外に、正確な情報がほとんど知られていないため、「非自明な零点」という呼称が妥当であろう。実際、 $0 < \text{Re}(s) < 1$ 内における $\zeta(s)$ の挙動を把握することが困難であり、非自明な零点の分布を明かすことも非常に困難である。 $\zeta(s)$ は $s = 1$ において位置の極を持つが、それ以外の特異点を持たないため、 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ において正則な関数となる。 $\zeta(s)$ の直線 $\text{Re}(s) = 1$ 及び $\text{Re}(s) = 0$ における挙動が容易ではないが、素数定理 (素数の個数を数える関数の近似公式) との関係により零点を持たないことが導かれ、関数の普遍性においても $\text{Re}(s) = 1$ が境界となり、 $0 < \text{Re}(s) < 1$ における挙動と大きく異なることも知られている。そのため、閉帯領域 $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$ よりも開帯領域 $0 < \text{Re}(s) < 1$ は主な研究対象となり、「臨界領域」と通称される。その真ん中にある直線 $\text{Re}(s) = 1/2$ を「臨界線」と呼ぶ。特に、 $\zeta(s)$ の非自明な零点が全て臨界線 $\text{Re}(s) = 1/2$ にあると予想されている。これは有名な「リーマン予想」の主張である。

$\zeta(s)$ の非自明な零点の分布は実に素数の分布を反映する。前の段落で記述した素数定理に対して、最善の誤差項が実現できるのはリーマン予想が成り立つときに限る。これらのことを最初の動機として、研究代表者はゼータ関数と L 関数の解析的な性質及び数論的問題への応用に興味を持ち、次の研究課題に取り組んだ：

- I. リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の k 階導関数 $\zeta^{(k)}(s)$ の零点の分布,
- II. セルバーグクラスの L 関数 $\mathcal{L}(s)$ の k 階導関数 $\mathcal{L}^{(k)}(s)$ の零点の分布,
- III. $\zeta(s)$ の等差数列における値分布,
- IV. $\zeta(s)$ と周期的な係数に付随するディリクレ級数の臨界領域内の値分布,
- V. 拡張されたセルバーグクラスの L 関数の臨界領域内の値分布,
- VI. 拡張されたセルバーグクラスの L 関数の $s = 1$ 付近でのローラン展開における係数,
- VII. n と互いに素な m 個の正整数の組みを数える Schemmel 関数 $\varphi_m(n)$ の平均,
- VIII. Hardy と Littlewood による特異級数 $\mathfrak{S}(k)$ の平均,
- IX. Hardy-Littlewood のゴールドバッハ予想とディリクレ L 関数 $L(s, \chi)$ の例外的零点の非存在,
- X. 正整数を素数の和として書き表す方法 (ゴールドバッハ表現) の個数の平均,
- XI. ゴールドバッハ表現の個数の平均と素数定理の誤差項との関係,
- XII. $\zeta(s)$ の零点の対相関に関する代替仮説と零点の重複性への応用,
- XIII. ランダム行列に関係する $L(s, \chi)$ の実軸に近い零点の重み付き分布,
- XIV. 離散的な半群の値の差の負冪の和とフルヴィッツゼータ関数 $\zeta(s, \alpha)$ の関係式.

2. 研究の目的

● 課題 I

A. Speiser (1935) はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の一階導関数 $\zeta'(s)$ が $\text{Re}(s) < 1/2$ で実数でない零点を持たないこととリーマン予想は同値であることを示した。この結果は $\zeta(s)$ の零点の分布がその導関数の零点の分布に関係していることを意味する。その後、 $\zeta(s)$ の導関数の零点は R. Spira (1960-70 年代), B. C. Berndt (1970), N. Levinson と H. L. Montgomery (1974), H. Akatsuka (2012) などにたくさん調べられた。研究代表者も 2015 年に出版された論文にてリーマン予想の仮定の下で、Akatsuka (2012) の $\zeta'(s)$ に関する結果を $\zeta(s)$ の全ての導関数に拡張し、Berndt (1970), Levinson と Montgomery (1974) の一部の結果を条件付きで改良した。Akatsuka が示した評価をさらに改良し、 $\zeta(s)$ 自身の場合と同じ誤差の評価を実現したのは F. Ge (2017) であった。Ge (2017) の改良方法を $\zeta(s)$ の全ての導関数の零点個数の評価に適用するのは課題 I の目的である。

● 課題 II

$\zeta(s)$ 以外に、 $q > 1$ を法とする主指標でない原始的指標 χ に付随するディリクレ L 関数 $L(s, \chi)$ に対しても類似の研究は C. Y. Yildirim (1996) に続き、研究代表者 (2017) 及び Akatsuka と研究代表者 (2018) によって行われた。特に、Akatsuka と研究代表者 (2018) の論文で Speiser (1935) の結果に類似した結果を得て、一般化されたリーマン予想の $L'(s, \chi)$ の零点の分布との同値条件を示した。課題 II の研究目的は、課題 I と合わせてこれらの研究を「セルバーグクラス」の L 関数の導関数に対して行うことである。セルバーグクラスとは $\zeta(s)$ と $L(s, \chi)$ のような関数等式とオイラー積表示を持ち、係数がラマヌジャン予想を満たすディリクレ級数で定義される関数の集まりである。

● 課題 III

C. R. Putnam (1954) は臨界線上の任意の等差数列 $\{1/2 +ihn\}_n$ に対して $\zeta(1/2 +ihn) \neq 0$ となる項 n が無限に存在することを示した。この結果は $\zeta(s)$ の零点の非周期性を意味する。課題 III ではこの結果を $\zeta(s)$ の零点の集合だけではなく、一般の値に対して拡張するのが目標である。

● 課題 IV と V

$\zeta(1/2 + it)$ と任意の直線 $re^{i\phi}$ の交差点は、 $\zeta(s)$ の関数等式 $\zeta(s) = \Delta(s)\zeta(1-s)$ を満たす $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 上正則関数 $\Delta(s)$ に対して、 $\Delta(1/2 + it) = e^{2i\phi}$ を満たす点 $1/2 + it$ である。J. Kalpokas と J. Steuding (2011) は、 $\zeta(1/2 + it) = 0$ となるところを除けば、 $t \in \mathbb{R}$ の関数として、 $\text{Re}(\zeta(1/2 + it)) > 0$ になることが多いことを詳しく観察した。課題 IV と V はこの結果を、点 $1/2 + it$ だけではなく、任意の $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、 $\Delta(\delta_a) = a$ となる点 $\delta_a \in \mathbb{C}$ の分布において考察する。また、 $\zeta(s)$ だけではなく、より一般の L 関数の関数族に対しても拡張したい。

● 課題 VI

$\zeta(s)$ と $L(s, \chi)$ の $s = 1$ の周りでのローラン展開の正冪における係数の漸近公式、上限と符号は W. E. Briggs と S. Chowla (1955), B. C. Berndt (1972), J. Knopfmacher (1978), Y. Matsuoka (1984–1989), J. A. Adell (2011) や S. Saad Eddin (2013) などによって調べられた。この研究は特に、 $s = 1$ の近くに例外的な零点を持つ可能性のある L 関数に対して重要である。これらの研究はより一般に、拡張されたセルバークラスの L 関数に対して行うのが課題 VI の研究目標である。拡張されたセルバークラスの L 関数はオイラー積表示を持たなくても良く、ディリクレ級数の係数もラマヌジャン予想を満たす必要もないため、課題 II で考察したセルバークラスより広い関数族である。

● 課題 VII

正整数 n と互いに素な n 以下の正整数の数を数える関数 $\varphi(n)$ は 1700 年代にオイラーにより導入され、素数の分布を理解するのに非常に役立つため、たくさん調べられてきた。Schemmel (1869) はこの関数をより一般化し、 n の全ての素因数より小さい m に対して、 n と互いに素な n 以下の m 個の正整数の組みを数える関数 $\varphi_m(n)$ を考えた。この関数はまだ十分に知られていないが、魔法陣や二つのグラフの直積の部分グラフの考察に現れた。課題 VII ではこの関数 $\varphi_m(n)$ の挙動をより詳しく調べたい。

● 課題 VIII

278 年も渡り証明されていないゴールドバッハ予想は「4 以上の偶数が二つの素数の和として書ける」ことを主張する。G. H. Hardy と J. E. Littlewood (1922) は、十分大きな偶数が全て二つの奇素数の和で書けると予想し、その和として表示する方法 (ゴールドバッハ表現) の個数の漸近公式も予想した。その漸近公式において、素数を渡る積として書ける Hardy と Littlewood の特異級数 (singular series) $\mathfrak{S}(k)$ と呼ばれる特殊な級数が現れる。 $\mathfrak{S}(k)$ の平均は D. A. Goldston (1990), J. B. Friedlander (1995), R. C. Vaughan (2001) などにより調べられてきた。特に、小区間における素数の分布を調べるために用いられている平均 $\sum_{k \leq x} (x-k) \mathfrak{S}(k)$ は注目されている。しかし従来、上からの評価しか得られず、課題 VIII では下から評価を調べたいのと、下と上から評価が同じオーダーになる (精密な評価) 条件も調べたい。

● 課題 IX

実指標 (実数の値を取るディリクレ指標) χ に付随する $L(s, \chi)$ は先ほど述べた例外的零点を持つ可能性があり、その存在は課題 VIII で述べたゴールドバッハ表現の個数の振る舞いに影響される。J. Fei (2016) は課題 VIII で述べた Hardy と Littlewood (1922) の予想 (量的ゴールドバッハ予想) より弱い予想の仮定の下で、素数 $q \equiv 3 \pmod{4}$ を法とする原始的実指標 χ に付随する $L(s, \chi)$ に対して、例外的零点の位置が $s = 1$ よりどれくらい遠くなるかの評価を示した。この結果は G. Bhowmik と K. Halupczok (2021) と独立に C. Jia (2021) により、少し違う形の弱い Hardy と Littlewood のゴールドバッハ予想を用いて、 $\chi(-1) = -1$ を満たす原始的実指標 χ に対して拡張された。これらの結果を全ての $L(s, \chi)$ に拡張するのは課題 IX の研究目的である。

● 課題 X と XI

正整数を素数の和として書き表す方法を「ゴールドバッハ表現」とし、課題 VIII の背景にあるゴールドバッハ予想の主張は、ゴールドバッハ表現の個数が常に > 0 であると言い換えられる。素数を数えるときと同様に、ゴールドバッハ表現の個数をそのまま数えるだけではなく、フォン・マンゴルト関数 $\Lambda(n)$ の重みで、ゴールドバッハ表現の個数関数を $\psi_2(n) := \sum_{m_1+m_2=n} \Lambda(m_1)\Lambda(m_2)$ とおく。 $\sum_{n \leq N} \psi_2(n)$ の漸近公式における誤差は Goldston (1990), A. Fujii (1991), A. Languasco (2000–), A. Granville (2007–08), G. Bhowmik (2010–) などにより研究され、リーマン予想の仮定の下で得られた漸近公式の誤差に対して、現在知られている最善の上から評価は A. Languasco と A. Zaccagnini (2011/2012) による $O(N(\log N)^3)$ である。これは実際に最善 (best possible) にとても近く、G. Bhowmik と J.-C. Schlage-Puchta (2010) は無条件に、 $\sum_{n \leq N} \psi_2(n)$ の漸近公式における誤差が $N \log \log N$ のオーダー以上になるような N が無限に存在することを示した。Goldston と Montgomery (1987) が示したように、 $\sum_{n \leq N} \psi_2(n)$ の漸近公式における誤差は小区間における素数の分布と密接に関係する。課題 X と XI では、その関係をより詳しく調べたい。

● 課題 XII

素数の精密な分布を得るために、 $\zeta(s)$ の非自明な零点の縦分布が重要な研究対象である。それを調べる道具の一つとして、Montgomery (1973) がリーマン予想の仮定の下で、 $\zeta(s)$ の二つの非自明な零点からなる組みの分布を調べるための関数 $F(x, T)$ を定義した。 $F(x, T)$ は $0 < \text{Re}(s) < 1$ にある $\zeta(s)$ の全ての零点に対しても定義できるが、零点の個数と密度を考慮し、零点が一直線上に並んでいない場合は $F(x, T)$ の解析が少し困難である。研究代表者らの直近の研究ではその場合を考察したが、従来の研究はほとんどリーマン予想の仮定の下で行われた。Montgomery の $F(x, T)$ -関数が、 $A > 1$ に対して、 $T < x < T^A$ の区間において $\frac{T}{2\pi} \log T$ に漸近すると予想され、更に、それによりほぼ全ての $\zeta(s)$ の非自明な零点が単純零点であり、 $\zeta(s)$ の非自明な零点の“対相関” (ペアコリレーション) 関数は $1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2 + \delta(u)$ であることが導ける。この関数はランダムエルミート行列の対相関関数に一致することも広く知られている。

前の段落で紹介した Montgomery の予想と反対の状況を考察するのは、1990 年代に提唱された「代替仮説」である。この代替仮説は Montgomery が証明した $F(x, T)$ -関数の小区間における振る舞いに反しないが、その区間の外側では未知な Montgomery の $F(x, T)$ -関数の挙動 (Montgomery の予想) と全く異なる挙動を予想するものである。代替仮説を仮定した $\zeta(s)$ の零点の分布に関する研究は Conrey と Iwaniec (2002)、Farmer, Gonek と Lee (2014)、S. A. C. Baluyot (2016)、Lagarias と Rodgers (2020) などにたくさん行われた。しかし従来、代替仮説の仮定の下で、Montgomery の予想と同様な $\zeta(s)$ の単純零点の割合は得られていない。課題 XII では代替仮説と $\zeta(s)$ の零点の重複性の関係を詳しく調べたい。

● 課題 XIII

ある保型 L 関数の特殊値の重みつき零点分布が S. Sugiyama により与えられたが、その研究によって零点分布が従来の分布と一致しない場合もあることが明らかになった。課題 XIII ではその例外的な場合が生じる条件を調べるために、一つの具体例として、 $L(s, \chi)$ の場合を考察する。

● 課題 XIV

L. G. Fel と T. Komatsu が「離散的な半群の値の差」の「負冪」の和を計算した時にゼータ関数に似ている公式を発見し、研究代表者に連絡したのはこの研究の始まりである。課題 XIV の目標は、Fel と Komatsu が考察した離散的な半群の値の差の負冪の和公式を用いて、新たなゼータ関数の関係式を得るものである。

3. 研究の方法

研究方法は「2. 研究の目的」で述べた先行研究の方法を活用しながら行うのである。共同研究者との研究打ち合わせは主にメールのやり取りとクラウド上の共同作業 (GoodNotes、Dropbox、Overleafなどを活用) で行なった。必要において、ウェブ会議 (Zoom や Google Meet) も利用した。また、次の研究課題に対して、コロナ禍を避けて現地での打ち合わせもしばしば行なった。

- 課題 IV の $\zeta(s)$ の場合と VII はコロナ禍以前に、共同研究者 J. Steuding 先生と主に現地で行なった。
- 課題 VI は共同研究者の S. Saad Eddin 氏と S. Inoue 氏が名古屋大学にいらっした時に、主に現地で行なった。
- 課題 XII はコロナ禍後に、主に American Institute of Mathematics にて共同研究者の D. A. Goldston 先生と S. A. C. Baluyot 氏で行なった。
- 課題 XIII は S. Sugiyama 先生が日本大学にいらっした時に数回の打ち合わせで行なった。論文投稿後に、拡張や改良の可能性について研究代表者の所属である九州大学で議論も行なった。

4. 研究成果

- 課題 I : Ge との共同研究で、Ge (2017) の結果を $\zeta(s)$ の全ての導関数に拡張した。即ち、研究代表者 (2015) の定理 3 の結果を改良した。
- 課題 II : S. Chaubey と S. Singh Khurana との共同研究で行なった。課題 I 及び「2. 研究の目的」で述べた先行研究の結果をセルバーグクラスの L 関数に拡張するための部分的結果を得た。具体的には、主定理として、Akatsuka と研究代表者 (2018) の定理 1.1、1.2 と 1.3 をセルバーグクラスの L 関数の全ての導関数に拡張し、セルバーグクラスの L 関数の導関数の自明な零点を確定した。その系として、セルバーグクラスの L 関数とその導関数の $\text{Re}(s) < 1/2$ という半平面における零点の関係を明確にできた。これは Levinson と Montgomery (1974) の定理 7 のセルバーグクラスの L 関数への拡張である。
- 課題 III : J. Lee, A. Sourmelidis, Steuding との共同研究で、臨界領域 $0 < \text{Re}(s) < 1$ に対して、臨界線 $\text{Re}(s) = 1/2$ を除いて、臨界領域内の縦の直線上の等差数列において、 $\zeta(s)$ の値は内点を持つ任意の複素数集合に含まれることを示した。但し、 $0 < \text{Re}(s) < 1/2$ に対して、例の複素数集合は無限大を内点を持つ必要がある。また、等差数列がどの程度で $\zeta(s)$ の値の分布を特徴付けているかも調べ、 $1/2 < \text{Re}(s) < 1$ における $\zeta(s)$ の特殊な同時普遍性も示した。

- 課題 IV : Steuding との共同研究で、任意の $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、 $\Delta(\delta_a) = a$ となる点 $\delta_a \in \mathbb{C}$ の分布を調べ、それに対して、 $\zeta(\delta_a)$ の分布と平均値を計算した。この研究をさらに、周期性を持つディリクレ級数によって定義される有理型関数 $L(s; f)$ に拡張し、Sourmelidis の協力で、Landau 公式に類似する $\sum_{\delta_a} x^{\delta_a}$ の上から評価を用いて、 δ_a の虚数部分の一様分布性及びその上での $L(s; f)$ の普遍性を示した。
- 課題 V : 課題 IV の結果を更に一般化し、「拡張されたセルバーグクラス」の L 関数 $\mathcal{L}(s)$ に対して拡張した。Kalpokas と Steuding (2011) や課題 IV の場合と違い、 $\mathcal{L}(s)$ は次元の大きさにより大きくなる場合があり、Lindelöf 予想の仮定が避けられない困難が生じるが、次元が小さい場合に対して、無条件な結果が得られる。また、同じ研究ラインで執筆したもう一つの論文で $\mathcal{L}(s)$ のディリクレ多項式近似 (ディリクレ級数を適当な長さに切り、ディリクレ級数が絶対収束する範囲より広い範囲で成り立つもの) 及び、実軸と交わる点 δ_a の分布も考察した。これらの研究の続きとして、Sourmelidis と Steuding と最近出版されたまた別の論文で $\zeta(s)$ の a -点 ρ_a と素数定理の関係を明らかにした。
- 課題 VI : 研究代表者は先行研究の証明方法が拡張されたセルバーグクラスの L 関数 $\mathcal{L}(s)$ に対しても適用できると気づき、Saad Eddin と S. Inoue との共同研究で、 $\mathcal{L}(s)$ の $s = 1$ 付近でのローラン展開における係数の上から評価を示した。この結果により、従来知られている $\zeta(s)$ に関する上限が改良できることも確かめられた。但し、 $\mathcal{L}(s)$ を決めるパラメーターの大きさにより、研究代表者らの結果は必ずしも全ての正冪に対して成り立たず、若干大きな冪以上に対してしか成り立たない場合もある。
- 課題 VII : Steuding との共同研究で、Schemmel (1869) はが考察した $\varphi_m(n)$ をさらに全ての整数 m に対して拡張し、 $\varphi_m(n)$ の n と m による平均を計算した。
- 課題 VIII : Goldston との共同研究で初めて $\sum_{k \leq x} (x - k) \mathfrak{S}(k)$ の下限を示した。この結果は実際、より滑らかな重みをつけたもの $S(x, m) := \sum_{k \leq x} (x - k)^m \mathfrak{S}(k)$ を研究しながら発見したものである。 $m \geq 2$ であるとき、 $S(x, m)$ の誤差項に対して漸近公式が得られ、 $\zeta(s)$ の零点に関わるいくつかの予想の下で精密な評価が得られた。
- 課題 IX : Friedlander, Goldston と H. Iwaniec との共同研究で、まず、先行研究において仮定された弱い Hardy と Littlewood のゴールドバッハ予想を、元の Hardy と Littlewood の予想に最も近い形に書き直した。手法の改良で Fei, Bhowmik と Halupczok, Jia の結果を全ての原始的実指標 χ に対して拡張した上で、 $L(s, \chi)$ の例外的な零点が存在し得る領域を更に狭めた。特に、弱い Hardy-Littlewood のゴールドバッハ予想の下で $L(s, \chi)$ の例外的な零点が存在しないことを示した。
- 課題 X : Goldston との共同研究で、ゴールドバッハ表現の個数の平均と滑らかな重み付き平均を計算し、小区間における素数の挙動との関係を明確にした。この考察で特に、ゴールドバッハ表現の個数の平均と素数定理の関係だけではなく、 $\zeta(s)$ の非自明な零点の対相関との関係も明らかになった。
- 課題 XI : 課題 X の続きで、Goldston との共同研究で、ゴールドバッハ表現の素数定理への応用を考察し、素数定理と $\zeta(s)$ の零点の対相関との関係も明らかにした。
- 課題 XII : Baluyot, Goldston と C. L. Turnage-Butterbaugh との共同研究で、代替仮説が $\zeta(s)$ の重複零点を許すことを明らかにした。そのため、Montgomery の予想と異なり、代替仮説だけでは、ほぼ全ての $\zeta(s)$ の非自明な零点が単純零点である主張が導けない。しかし、代替仮説より少しだけ強い予想を仮定すれば、ほぼ全ての $\zeta(s)$ の非自明な零点が単純零点であることが得られる。この研究成果をまとめる論文は交付期間内に完成できず、現在投稿準備である。
- 課題 XIII : Sugiyama との共同研究で、「2. 研究の目的」で述べた Sugiyama が発見した例外的な現象が、 $L(s, \chi)$ に対しても生じることを明らかにした。
- 課題 XIV : Fel と Komatsu との共同研究で、離散的な半群の値の差の負冪の和が、 $\zeta(s)$ と $\zeta(s)$ のまた別の一般化であるフルヴィッツゼータ関数 $\zeta(s, \alpha)$ によって書き表せることを明らかにした。その関係式を用いて、 $\zeta(s)$ を $\zeta(s, \alpha)$ の有理数 α に関する和として表す公式に対して別証明を与えた。
- 追加課題 : 最後に、以上で述べた純粋数学の研究以外に、研究代表者は理化学研究所の数理創造プログラムの基礎科学特別研究員として行った分野横断型共同研究も続けている。生物物理学者の C. Beauchemin (トロント州立大学教授 兼 理化学研究所数理創造プログラム副プログラムディレクター) と天体物理学者の D. Warren (当時理化学研究所数理創造プログラム研究員、現在フロリダ工科大学助教) と共に、ウイルスの感染率を表す二つの異なる数学モデルの間における数学的な関係を調べた。この研究の目標は、二つのモデルの変換方法を数学的に与えることであったが、自明な場合において二つのモデルを満たす解が存在しないことを明らかにした。自分と共同研究者の時間の都合で研究が4年以上も渡り行われてきて、ほとんどそれぞれモデルの解を求めることに費やした。理論的な解 (解析解) と数値的な解が一致することをまず確認しなくてはいけないが、最初に求めた解析解の形が複雑すぎたため、正否の確認が不可能であった。修正と式の単純化を繰り返して2022年度の始まりにやっと解析解が確認でき、シンプルな形のおかげで、二つのモデルの関係を調べることができた。二つモデルは理論的に (解析的には) 同値ではなく、同値な場合もないことが明らかになった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計21件（うち査読付論文 16件 / うち国際共著 15件 / うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Ade Irma Suriajaya	4. 巻 2092
2. 論文標題 リーマンゼータ関数とディリクレL関数の導関数の零点の分布	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 RIMS Kyokuyuroku (for RIMS Workshop 2017 "Analytic Number Theory and Related Areas")	6. 最初と最後の頁 9-14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ade Irma Suriajaya	4. 巻 2162
2. 論文標題 リーマンゼータ関数の導関数の零点の個数評価における誤差項の改良 (Improved error estimate for the number of zeros of the derivatives of the Riemann zeta function)	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kyokuyuroku (for RIMS Workshop 2019 "Analytic Number Theory and Related Topics")	6. 最初と最後の頁 42-53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ade Irma Suriajaya	4. 巻 2196
2. 論文標題 Hardy-Littlewoodの特異級数のRiesz平均における誤差項 (Error estimates for the Riesz mean of Hardy-Littlewood singular series)	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kyokuyuroku (for RIMS Workshop 2020 "Problems and Prospects in Analytic Number Theory")	6. 最初と最後の頁 43-57
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ade Irma Suriajaya	4. 巻 2222
2. 論文標題 ゴールドバッハ表現に関する平均、リーマンゼータ関数の零点のペアコリレーション及び素数定理の誤差項との関係 (The average number of Goldbach representations, pair correlation of zeros of the Riemann zeta function and error term of the prime number theorem)	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 RIMS Kyokuyuroku (for RIMS Workshop 2021 "Analytic Number Theory and Related Topics")	6. 最初と最後の頁 113-127
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 GOLDSTON DANIEL A., SURIAJAYA ADE IRMA	4. 巻 250
2. 論文標題 ON AN AVERAGE GOLDBACH REPRESENTATION FORMULA OF FUJII	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 511 ~ 532
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2022.44	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sourmelidis Athanasios, Steuding Joern, Suriajaya Ade Irma	4. 巻 204
2. 論文標題 Riemann-type functional equations: Dirichlet polynomial approximations and a weak Gram law	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Acta Arithmetica	6. 最初と最後の頁 97 ~ 113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/aa210111-13-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sourmelidis Athanasios, Steuding Joern, Suriajaya Ade Irma	4. 巻 33
2. 論文標題 Riemann-type functional equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Indagationes Mathematicae	6. 最初と最後の頁 1236 ~ 1262
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.indag.2022.08.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sugiyama Shingo, Suriajaya Ade Irma	4. 巻 8
2. 論文標題 Weighted one-level density of low-lying zeros of Dirichlet L-functions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 55
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-022-00359-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Goldston D. A., Suriajaya Ade Irma	4. 巻 8
2. 論文標題 The prime number theorem and pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 71
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-022-00371-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Chaubey Sneha, Khurana Suraj, Suriajaya Ade	4. 巻 151
2. 論文標題 Zeros of derivatives of L-functions in the Selberg class on $\text{Re}(s) < 1/2$	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1855 ~ 1866
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/16251	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sourmelidis Athanasios, Steuding Joern, Suriajaya Ade Irma	4. 巻 314
2. 論文標題 Dirichlet Series with Periodic Coefficients and Their Value-Distribution near the Critical Line	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics	6. 最初と最後の頁 238 ~ 263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1134/S0081543821040118	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Goldston D.A., Suriajaya Ade Irma	4. 巻 227
2. 論文標題 The error term in the Cesaro mean of the prime pair singular series	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 144 ~ 157
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2021.03.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Goldston D. A., Suriajaya Ade Irma	4. 巻 200
2. 論文標題 A singular series average and the zeros of the Riemann zeta-function	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Acta Arithmetica	6. 最初と最後の頁 71 ~ 90
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/aa200821-24-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Friedlander J.B., Goldston D.A., Iwaniec H., Suriajaya A.I.	4. 巻 233
2. 論文標題 Exceptional zeros and the Goldbach problem	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 78 ~ 86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2021.06.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fel Leonid G., Komatsu Takao, Suriajaya Ade Irma	4. 巻 347
2. 論文標題 A Sum of Negative Degrees of the Gaps Values in Two-Generated Numerical Semigroups and Identities for the Hurwitz Zeta Function	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nathanson M.B. (eds) Combinatorial and Additive Number Theory IV. CANT 2020. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 151 ~ 160
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-67996-5_8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Steuding Joern, Suriajaya Ade Irma	4. 巻 20
2. 論文標題 Value-Distribution of the Riemann Zeta-Function Along Its Julia Lines	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Computational Methods and Function Theory	6. 最初と最後の頁 389 ~ 401
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40315-020-00316-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Lee Junghun, Sourmelidis Athanasios, Steuding Joern, Suriajaya Ade Irma	4. 巻 84
2. 論文標題 The values of the Riemann zeta-function on discrete sets	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 315 ~ 334
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08410315	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fel Leonid G., Komatsu Takao, Suriajaya Ade Irma	4. 巻 52
2. 論文標題 A sum of negative degrees of the gaps values in 2 and 3-generated numerical semigroups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales Mathematicae et Informaticae	6. 最初と最後の頁 85 ~ 95
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.33039/ami.2020.08.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Inoue Shota, Eddin Sumaia Saad, Suriajaya Ade Irma	4. 巻 55
2. 論文標題 Stieltjes constants of L-functions in the extended Selberg class	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 609 ~ 621
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-021-00391-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ge Fan, Suriajaya Ade Irma	4. 巻 55
2. 論文標題 Note on the number of zeros of $\zeta^{(k)}(s)$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 661 ~ 672
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-019-00219-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 A. I. Suriajaya	4. 巻 2131-19
2. 論文標題 リーマンゼータ関数の臨界領域内等差数列における値の分布 (Values of the Riemann zeta function on vertical arithmetic progressions in the critical strip)	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kyokuryoku (for RIMS Workshop 2018 "Analytic Number Theory and Related Topics")	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計34件 (うち招待講演 17件 / うち国際学会 24件)

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Weighted One-level Density of Low-lying Zeros of Dirichlet L-Functions
3. 学会等名 Arithmetik an der A7 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Goldbach's Conjecture, the Riemann Hypothesis and problems on twin primes in Number Theory, and recent results relating Goldbach and prime pair problems to zeros of L-functions
3. 学会等名 Women in Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daniel A. Goldston
2. 発表標題 Pair Correlation of Zeta-Zeros and Two Problems on Primes
3. 学会等名 Number Theory Conference in honour of Kalman Gyory - Janos Pintz - Andras Sarkoezy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shingo Sugiyama
2. 発表標題 The one-level density for Dirichlet L-functions weighted by L-values
3. 学会等名 9th Kyoto conference on automorphic forms (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 ゴールドバッハ表現とディリクレ関数の例外的零点
3. 学会等名 第14回数論女性の集まり
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Goldbach representations and Landau-Siegel zeros (Die Goldbachschen Darstellungen und Landau-Siegel-Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen)
3. 学会等名 Arithmetik an der A7 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 The number of Goldbach representations and pair correlation of zeros of the Riemann zeta function
3. 学会等名 DMV-OEMG Annual Meeting 2021 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 ゴールドバッハ表現と素数定理の誤差評価、リーマンゼータ関数の零点のペアコリレーション (対相関)
3. 学会等名 2021大分整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 The Hardy-Littlewood Goldbach Conjecture and Landau-Siegel zeros
3. 学会等名 Incheon National University 13th International Symposium on Natural Sciences (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 The average number of Goldbach representations, pair correlation of zeros of the Riemann zeta function and error term of the prime number theorem
3. 学会等名 RIMS Workshop 2021: Analytic Number Theory and Related Topics
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 An Upper Bound for Stieltjes Constants of L-functions in the Extended Selberg Class
3. 学会等名 FCK COVID-19 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 L関数のリーマン型関数等式のJulia線の周りでの値分布
3. 学会等名 2020大分整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Error term of the Riesz mean of Hardy-Littlewood singular series
3. 学会等名 RIMS Workshop: Problems and Prospects in Analytic Number Theory
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Distribution of values of L-functions arising from a Riemann-type functional equation
3. 学会等名 International Conference on Analytic Number Theory dedicated to 75th anniversary of G.I. Arkhipov and S.M. Voronin (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Error term of the Riesz mean of Hardy-Littlewood singular series (Der Fehlerterm des Riesz-Mittel der singular series von Hardy und Littlewood)
3. 学会等名 Arithmetik an der A7 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Generalized Schemmel's function and its associated mean-values
3. 学会等名 The fifth mini symposium of the Roman Number Theory Association (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Schemmel関数の平均値 後編
3. 学会等名 第12回数論女性の集まり(WINJ12)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Distribution of zeros of the derivatives of the Riemann zeta function and its relations to zeros of the zeta function itself
3. 学会等名 Boston University/Keio University Workshop 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Improved error estimate for the number of zeros of the derivatives of the Riemann zeta function
3. 学会等名 RIMS Workshop: Analytic Number Theory and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 ゼータ関数とL関数、そして、それらに作られた世界
3. 学会等名 理研-九大ジョイントワークショップ「数理が紡ぐ素粒子・原子核・宇宙」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Immersed in math and numbers -- entering the world of Zeta functions
3. 学会等名 Lecture on Pure and Applied Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Value distribution of the Riemann zeta function around its Julia lines
3. 学会等名 The 13th Young Mathematicians Conference on Zeta Functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Zeros of derivatives of L-functions in the Selberg class on the left-half plane and the left-half of the critical strip
3. 学会等名 RIMS Workshop: Analytic Number Theory and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 The Pair Correlation Conjecture, the Alternative Hypothesis, and an Unconditional Montgomery Theorem
3. 学会等名 RIMS Workshop for Women in Zeta Functions and Their Representations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Mean-values associated with Schemmel's function
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 The multiplication theorem of the Hurwitz zeta function by using sum of gaps in two-generated numerical semigroups
3. 学会等名 Mini workshop at the Institute of Mathematical Sciences Chennai (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 An upper bound for Stieltjes constants of L-functions in the Selberg class
3. 学会等名 Number Theory Mini Workshop at Sophia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Values of the Riemann zeta function on vertical arithmetic progressions in the critical strip
3. 学会等名 RIMS Workshop: Analytic Number Theory and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 リーマンゼータ関数とディリクレ関数の零点の分布及びそれらの導関数との関係
3. 学会等名 2018大分鹿児島整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Zeros of the derivatives of the Riemann zeta function and Dirichlet L-functions
3. 学会等名 Number Theory Down Under 6 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Values of the Riemann zeta function on vertical arithmetic progressions in the critical strip
3. 学会等名 International Conference on Number Theory Dedicated to the 70th Birthdays of Professors Antanas Laurincikas and Eugenijus Manstavicius (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Values of the Riemann zeta function on vertical arithmetic progressions in the critical strip
3. 学会等名 Conference on elementary and analytic number theory (ELAZ) 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Values of the Riemann zeta function on vertical arithmetic progressions in the critical strip
3. 学会等名 The 15th Canadian Number Theory Association Conference (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ade Irma Suriajaya
2. 発表標題 Zeros of the derivatives of the Riemann zeta function and Dirichlet L-functions
3. 学会等名 The fourth mini symposium of the Roman Number Theory Association (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	サンノゼ州立大学	ラトガーズ大学	College of Williams and Mary	他2機関
ドイツ	ヴェルツブルク大学			
カナダ	トロント大学	ウォータールー大学	トロント州立大学	
インド	インドラプラサ情報技術研究所、デリー	インド工科大学カンプール校		
オーストリア	グラーツ工科大学	リンツ大学		
中国	浙江理工大学	武漢大学		
イスラエル	テクニオン - イスラエル工科大学			