

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 8 月 3 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13425

研究課題名（和文）ブラウン運動の軌跡と関連する統計物理モデルの研究

研究課題名（英文）On trace of Brownian motion and related models from statistical physics

研究代表者

白石 大典 (Shiraishi, Daisuke)

京都大学・情報学研究科・准教授

研究者番号：00647323

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究における最も良い成果は、北京大学のXinyi Li氏との共同研究で得られたループ除去ランダムウォークに関する一連の結果であろう。特に3次元ループ除去ランダムウォークのプロセスレベルでのスケール極限を証明した結果が本研究の最大の貢献といえることができる。基本的に人類はまだ満足に非マルコフ過程を扱えていない状況であるが、ループ除去ランダムウォークに関しては、我々の結果により、全ての次元でスケール極限がプロセスレベルで扱えることとなった。3次元の場合はスケール極限の良い記述は与えられていない。そのような記述を与えることは今後の課題である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ループ除去ランダムウォークは他の多くの確率モデルと関わりのある重要な非マルコフ過程であるが、特に3次元の場合は最も解析が困難であり、研究があまり進んでいない状況であった。2次元の場合のように複素解析を用いた共形場理論の手法を用いたり、高次元の場合のような平均場の理論を適用することが出来ないことが本質的な困難を生む。本研究では、離散調和解析、関数解析、確率論、幾何学といった分野横断的な手法を組み合わせることにより、一つ一つの困難を地道に対処していった。そこで培われた手法は、他の次元の場合に対しても適用可能である。

研究成果の概要（英文）：In this research we consider loop-erased random walk (LERW) and its scaling limit in three dimensions, and prove that 3D LERW parametrized by renormalized length converges to its scaling limit parametrized by some suitable measure with respect to the uniform convergence topology in the lattice size scaling limit. Our result greatly improves the work of Gady Kozma which establishes the weak convergence of the rescaled trace of 3D LERW towards a random compact set with respect to the Hausdorff distance. To prove this, we also need to give an asymptotic estimate on the one-point function for LERW and the non-intersection probability of LERW and simple random walk in three dimensions for dyadic scales. These estimates will be crucial to the characterization of the convergence of LERW to its scaling limit in natural parametrization. As a step in the proof, we also obtain a coupling of two pairs of LERW and SRW with different starting points conditioned to avoid each other.

研究分野：確率論

キーワード：ランダムウォーク

1. 研究開始当初の背景

ループ除去ランダムウォークとは、ランダムウォークのパスからループを現れる順に切り取って得られるランダムなシンプルパスのことである。1980年にLawlerにより提起されて以降、他の多くの確率モデルとの関係も示され、活発に研究が行われてきた。一様全域木との関係を与えるWilsonのアルゴリズムや2次元の共形場理論との関りを示したSchrammの理論(SLE理論は)特筆すべき事項である。本研究のターゲットは3次元ループ除去ランダムウォークである。

3次元ループ除去ランダムウォークに関する研究結果は本質的には以下の3つがあった。ひとつはLawlerによる成長指数の上下の評価である。すなわちループ除去ランダムウォークの次元は1よりも真に大きく $5/3$ 以下であることが1999年にLawlerにより証明されている。このことから3次元ループ除去ランダムウォークは直線的ではなく、また元々のランダムウォークとは全く異なる構造を持つことがわかる。

二つ目の先行結果としてKozmaによるループ除去ランダムウォークを集落とみたときのハウスドルフ距離に関するスケール極限の存在定理である。すなわち、ループ除去ランダムウォークが通過した点の集まりをユークリッド空間の部分集合とみなしたとき、それをスケールリングしたものの分布はハウスドルフ距離の位相で弱収束するのである。この弱収束極限をここではKozmaのスケール極限と呼ぶことにしよう。Kozmaのスケール極限はユークリッド空間のランダムな部分集合である。

最後の三つ目の結果は、私自身による結果であり、それは成長指数の存在定理である。

One-point functionの精密な評価は得られていない状況であった。複素解析を用いた共形場理論が使える2次元の議論や平均場の理論が適用できる高次元の場合の手法が3次元の場合では使えないことが困難を生む原因となっている。

2. 研究の目的

本研究の目的は3次元ループ除去ランダムウォークを確率過程とみなしたときの一様収束距離に関するスケール極限の存在を証明することである。非マルコフ過程に対するプルセスレベルでのスケール極限の存在証明が成功している例はほとんどない。本研究が遂行されれば、全ての次元でループ除去ランダムウォークの極限の存在証明が与えられることになり、その意義は大きいものと考えられる。

また、その証明を与える際に必要となる、離散調和解析、関数解析、確率論、幾何学といった分野横断的手法を組み合わせることによって得られる知見はそれ自身興味あるものであるといえる。

3. 研究の方法

まずone-point functionの精密な評価を与える必要がある。その後、ループ除去ランダムウォークに対する大数の法則にあたる結果を示さなければならない。いずれの場合もカップリングの技法を用いる。その後、Kozmaのスケール極限がMinkowski contentを持つことを証明し、それを用いてスケール極限をパラメータ付けする。時空に関して適切にスケールリングしたループ除去ランダムウォークが、パラメトライズされたスケール極限に収束することを証明する。証明を遂行するために、離散調和解析、関数解析、確率論、幾何学といった分野横断的手法を組み合わせる必要がある。

LERWは確率過程としてみれば、非マルコフ過程であり、その扱いは通常のマルコフ過程の扱いとは大きく異なり、独特な手法が要求される。とはいえ、単純ランダムウォークからループを切り取ったものであるから、単純ランダムウォークに関する知見を総動員することにより、解析を進めることができる。これが他の非マルコフ過程と大きく異なる点であり、LERWの研究が進んでいる理由となっている。

また、LERWはLaplacian random walkと呼ばれているように、離散調和解析との相性が良い。必要となる調和解析の結果を適宜用意しながら研究を進めていくことになる。こうして得られる調和解析の結果はそれ自身意味のあるものとなる。例えば、離散のハルナック原理はよく知られている結果であるが、離散の境界ハルナック原理はそこまで知れ渡っているものではなく、LERWの研究を進める上で準備する必要があった。

4. 研究成果

上記の「3. 研究の方法」で述べたプログラムを全て遂行したことが本研究の成果である。以下でそれを詳しく述べていく。

まずは one-point function の評価であるが、与えられた点をループ除去ランダムウォークが通過する確率の極めて精密な評価を与えることができた。この結果を`One-point function estimates for loop-erased random walk in three dimensions`というタイトルの論文にまとめ、確率論のジャーナルである Electronic Journal of Probability に掲載された。

その後、カップリングの手法を用いて大数の法則にあたる結果を示し、Kozma のスケール極限が Minkowski content を持つことを示した。さらにそこへループ除去ランダムウォークが収束することを証明した。これらの結果を`Convergence of three-dimensional loop-erased random walk in the natural parametrization`というタイトルの論文にまとめてしかるべきジャーナルに投稿した。私に知る限り、3次元のランダムなシンプルパスを過程とみなして、スケール極限の存在を示したのはこの結果が初めてである。この結果が今後の非マルコフ過程の研究の発展に少しでも役に立てば幸いであるが、それに関してはもうしばらく時間を要するであろうと思われる。実際、スケール極限の存在は示されたものの、それがどのように記述できるかは今のところ分かっていない。こうした意味でも、極限の良い特徴付け(良い記述)を与えることは重要な問題であると考えられる。(2次元の場合のように、そもそも良い記述が本当にあるかどうかもわからない状態である。)3次元の場合は、このように謎に包まれた状態であるが、全く手が出ないわけではないことが証明できたのではないかと思う。

また、こうして構成された確率過程としてのスケール極限がどの程度の連続性を持つかは自然な問いである。この問題に関しては、ある指数 a が存在して b が a よりも小さいときはスケール極限は b -Holder 連続であるが、 b が a 以上であるときは b -Holder 連続でないことを証明した。この結果を`The Hölder continuity of the scaling limit of three-dimensional loop-erased random walk`というタイトルの論文にまとめ上げ、Electron Journal of Probability に掲載された。ブラウン運動は $1/2$ -Holder より少し悪い連続性を持つことは有名な事実であるが、3次元のランダムな単純曲線に関して、こうした結果を示したのは私の知る限りでは初めてなのではないかと思う。

上で述べた LERW の諸結果を得るために、LERW に対する分離補題、離散境界ハルナック原理、LERW に対する調和測度の導入といった離散調和解析における様々な結果を準備した。特に離散境界ハルナック原理に関しては、必要最低限の弱い結果しか得られていない状況である。どこまで結果を強めることができるかは今後の課題である。集合の境界に対する仮定を弱めることができるかどうかは鍵となるが、条件を弱めるためのアイデアを見つけようとしている段階である。

また、応用として、3次元一様全域木のスケール極限の存在を示した。ここで一様全域木はグラフ距離の入った距離空間とみなしており、位相は Gromov-Hausdorff-Prokhorov で取るものとする。スケール極限の特徴付けはまだ出来ていないが、それが満たす諸性質を示すことができた。さらに、3次元一様全域木上のランダムウォークの解析も行った。興味があるのは、3次元一様全域木の複雑な構造がその上を走るランダムウォークの挙動にどのような影響をおよぼすのかということである。これに関してはランダムウォークの熱核を評価するという方法があり、3次元一様全域木のスペクトル次元を 3次元 LERW の成長指数で記述することに成功した。3次元 LERW の成長指数の値はまだ求まっていない状態である今後の研究が待たれるところであろう。

こうして得られた一連の結果を国内外の研究集会やセミナーにおいて口頭発表し、成果を報告した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Omer Angel, David A. Croydon, Sarai Hernandez-Torres, Daisuke Shiraishi	4. 巻 87
2. 論文標題 The number of spanning clusters of the uniform spanning tree in three dimensions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 403-414
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Li Xinyi, Shiraishi Daisuke	4. 巻 24
2. 論文標題 One-point function estimates for loop-erased random walk in three dimensions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 46pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/19-EJP361	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Artem Sapozhnikov, Daisuke Shiraishi	4. 巻 172
2. 論文標題 On Brownian motion, simple paths, and loops	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Probability Theory and Related Fields	6. 最初と最後の頁 615-662
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00440-017-0817-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Croydon D. A., Shiraishi D.	4. 巻 59
2. 論文標題 Scaling limit for random walk on the range of random walk in four dimensions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Henri P. Probab. et Statistiques	6. 最初と最後の頁 166-184
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/22-AIHP1243	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Daisuke Shiraishi
2. 発表標題 Convergence of three-dimensional loop-erased random walk in the natural parameterization
3. 学会等名 The 10th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Daisuke Shiraishi
2. 発表標題 Scaling Limit of Uniform Spanning Tree in Three Dimensions
3. 学会等名 The 12th Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute (MSJ-SI) Stochastic Analysis, Random Fields and Integrable Probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Daisuke Shiraishi
2. 発表標題 Scaling limit of uniform spanning tree in three dimensions
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Daisuke Shiraishi
2. 発表標題 Geometry of Brownian motion
3. 学会等名 2nd Hong Kong/Kyoto Workshop on ``Fractal Geometry and Related Areas'' (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------