

平成 22 年 4 月 22 日現在

研究種目：基盤研究 (A)
研究期間：2007~2010
課題番号：19204013
研究課題名 (和文) 偏微分方程式の相空間解析

研究課題名 (英文) Phase Space Analysis of Partial Differential Equations

研究代表者
西谷 達雄 (NISHITANI TATSUO)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80127117

研究代表者の専門分野：偏微分方程式
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：超局所解析, 分散型方程式, 初期値問題, ハミルトン流, 適切性, Gevrey 空間

1. 研究計画の概要

(1) 2次特性点を持つ双曲型方程式の構造決定を初期値問題の Gevrey 適切性を利用して行う。

(2) 双曲型不動点の近傍での零陪特性帯の挙動がシュレディンガー方程式の超局所解の存在, 一意性にどう関係するかを解明する。

(3) 種々の分散型波動方程式の解の漸近的挙動を, 新しい関数空間, 解の平滑化, 修正位相関数の方法を用い明らかにする。

2. 研究の進捗状況

(1) どの Gevrey 空間で初期値問題が低階に拘らず適切になるか, を基本概念として, その最大 Gevrey 指数で双曲型作用素の構造を決定する, という立場で研究を遂行し以下の結果を得た。非実効果的双曲型作用素に対しては, ハミルトン写像の二乗の核と像の共通部分が零空間の場合には, 上記 Gevrey 指数は 2 で, かつこの指数は最良である。この線形空間が零空間でない場合には Gevrey 指数は, この空間のみでは決定されず, 零陪特性帯の挙動が深く関係する。2次特性多様体に極限点を持つ零陪特性帯が存在する場合は, 上記 Gevrey 指数は 3 でかつこの指数は最良である。そのような零陪特性帯が存在しない場合は, 上記 Gevrey 指数は 4 でかつこの指数は最良である。以上によって, 強 Gevrey 適切性指数が非実効果的双曲型作用素の構造をほぼ決定することが示された。

(2) 双曲型不動点の近傍には, 安定多様体と不安定多様体が存在するが, 不安定多様体上でシュレディンガー方程式の超局所解を与えたとき, エネルギーレベルが特定の数値でないときは, この与えられた解が不動点の

近傍で解を一意的に決定することを示した。

(3) 非線形シュレディンガー方程式, および非線形クライナーゴールドン方程式の初期値問題に対して, 解の Lifespan の下限の漸近評価を得ることに成功した。これによって, 今まで個別に研究されてきた諸結果に対して, それらを統一的に説明する考え方の発見につながるものと期待される。

3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している。

(理由)

双曲型方程式の構造決定については, 作用素の主要部の構造は強 Gevrey 適切性指数で決定されることが解明でき, 当初の計画以上に進展している。作用素全体の構造を完全に決定するには, 低解の影響の仕方を決定する必要があり, 無限回微分可能なクラスでの初期値問題の適切性を考えることになる。これは今後の課題である。双曲型不動点の近傍でのシュレディンガー方程式の超局所解については, その存在と一意性問題については予想する結果を得たが, その結果のレゾナンスの存在問題への応用はこれからの課題である。非線形シュレディンガー方程式, および非線形クライナーゴールドン方程式の初期値問題の解の Lifespan の下限の漸近評価を得ることに成功したが, これは現在のところ, 空間 1次元に限って成功しており, 空間多次元への拡張が残された問題である。

4. 今後の研究の推進方策

(1) 双曲型作用素の全体の構造を, 特に低階の構造を, 初期値問題の適切性を通して決定するために, 無限回微分可能な関数空間で

の適切性を研究し、これが、低階とどのように関係するか、特に Levi 条件、Ivrii-Hormander 条件と適切性の関係を研究する。

(2) 非線形クライン-ゴルドン方程式の初期値問題の解の Lifespan の下限の漸近評価については、一般空間次元への拡張は非常に困難であると予想されるので、まず他の種々の分散型波動方程式に対して、空間 1 次元で、Lifespan の下限の漸近評価を求める。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

① T.Nishitani On Gevrey well-posedness of the Cauchy problem for some noneffectively hyperbolic operators, *Advances in Phase Space Analysis in PDEs*, Birkhauser, 査読有, 2009, 217-232.

② T.Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, the Gevrey 5 well-posedness, *J. d'Analyse Math.* 査読有, 105, 2008, 197-240.

③ T.Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, the Ivrii-Petkov-Hormander condition and the Gevrey well-posedness, *Serdica Math. J.* 査読有, 34, 2008, 155-178.

[学会発表] (計 14 件)

① 西谷達雄, 非実効果的双曲型方程式の初期値問題と Gevrey 空間(解析学賞受賞特別講演), 2010 年 3 月 24 日, 慶応大学, 日本数学会 2010 年度年会.

② T.Nishitani, On the Gevrey well-posedness of the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, 2010 年 2 月 10 日, Ennio De Giorgi Center, Pisa, Italy, *Linear and Nonlinear Hyperbolic Equations*

③ T.Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, the Gevrey 4 well-posedness, 2009 年 7 月 16 日, 7-th ISSAC Congress, Imperial College, London, England