

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19340001

研究課題名（和文）トーリック多様体の理論の展開と応用の研究

研究課題名（英文）Extensions and applications of the theory of toric varieties

研究代表者

石田 正典 (ISHIDA MASANORI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30124548

研究成果の概要（和文）：

トーリック多様体の理論の展開と応用について研究を行い、扇や半群環の概念の拡張とそれに対応するトーリック多様体やその拡張、実空間の有界とは限らない凸多面体による分割から得られる局所有限型のスキームについて新しい研究成果を得た。凸体のミンコフスキー和とそれに関連したアンブル直線束のベリーアンブル性と正規性、フロベニウス射が経由する正規代数多様体、高次元循環商特異点のトーリック解消などについても研究成果を得た。

研究成果の概要（英文）：

We have studied on the extensions and applications of the theory of toric varieties. We got new results on the extensions of the concepts of fans and semigroup rings and associated toric varieties and their extensions, locally finite scheme associated to a decomposition of a real space by not necessarily bounded polytopes. We also got results on the Minkowski sums of convex polytopes and very ampleness and normality of line bundles, normal varieties factoring Frobenius morphisms, and resolutions of higherdimensional cyclic quotient singularities.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2008 年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2009 年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2010 年度	2,400,000	720,000	3,120,000
年度			
総計	9,700,000	2,910,000	12,610,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：トーリック多様体, 扇, 凸多面体, 循環商特異点, 代数多様体

1. 研究開始当初の背景

世界的にトーリック多様体の研究が盛んに

なり始めたのは 25 年前ぐらいからであり、最近ますます多くの関連した研究がなされるようになってきた。東北大学ではそれ以前からこの理論の創設者の一人である小田忠

雄を中心にトーリック多様体の研究がなされて来た。

2. 研究の目的

トーリック多様体は同じ次元の代数的トーラスが効果的に作用する正規代数多様体として定義される。複素数体上でいえば、 r 次元のトーリック多様体には r 次元のトーラス群が代数群として作用していて、しかもこのトーラス群は同じトーリック多様体にザリスキ開集合として含まれている。アフィン空間や射影空間はトーリック多様体の例であり、ヒルツェブルフ曲面や重み付き射影空間もその例である。このような代数多様体の重要性が認識されてきたのは 40 年くらい前からで、アーベル多様体のモジュライのコンパクト化、標数 0 の代数曲線上の代数多様体の退化族の安定化などに応用された。素粒子論が起源のカラビ・ヤウ多様体のミラー対称性の解釈にトーリック多様体を利用されたことも注目に値する。

トーリック多様体の特徴は実空間の有理的な凸錐体の集まりである扇により記述できることにある。また射影的トーリック多様体のアンブルな直線束は有界な凸多面体に対応する。逆に扇や凸多面体を任意に与えることにより、トーリック多様体やアンブル直線束を伴うトーリック多様体を構成することもできる。このことにより、トーリック多様体、特に射影的トーリック多様体の問題は多くの場合凸多面体や凸錐体の問題に還元され、凸体の幾何学や組合せの計算など計算しやすくなる場合が多く、具体例を計算機にかけること、コホモロジー群の次元や、関連する特異点のゼータ関数の 0 での値、あるいは部分多様体の交点数の計算も可能となる。

研究代表者が 1990 年に出版した著書「代数幾何学の基礎」で述べているように、射影的トーリック多様体は射影空間の一般化としての性質を強く持っている。したがって、射影空間の代わりに射影的トーリック多様体の超曲面を考えるように、様々な代数多様体の例を構成するのもにも便利である。このような特長を生かして、トーリック多様体の理論を応用して、代数幾何学の様々な分野で具体例の構成やそれらの不変量などの性質を調べ、これを一般論の発展へ還元していくことがこの研究の目的であった。

単体的扇で定義された任意のトーリック多様体を、アフィン空間の適当な開集合のトーラス群の作用による商空間として表すコ

ックスによる斉次座標化の理論は、単純ではあるがベクトル束や自己同型の問題、あるいはトーリック多様体の変形の問題に応用され、さらにモーメント写像などを通じて微分幾何学や物理学にまで応用されている。このようなトーリック多様体の理論自体の展開もさらにいろいろな方向に可能と考えられるので、このような理論の展開を行うことも目的の一つであった。

トーリック多様体に対応する凸多面体は有理的な座標に頂点をもつものに限られるが、一般の実数に座標を持つ点で生成される凸多面体や錐体も考えられ、有理な場合とは異なる組合せ論的構造を持つ場合がある。このような有理的とは限らない錐体で構成される扇、すなわち実扇を考え、逆にこれに対応する代数幾何学を考えることも有望なトーリック多様体の理論の展開の方向である。研究代表者の別の著書では初歩的な段階ではあるが扇自体を一種の多様体と考えることが可能であることを示しており、この面では実扇を多様体と考えることに障害はない。これについても扇を代数多様体の記述のためにグロタンディックにより導入されたスキームの一般化として定式化するなど、様々な可能性を考えながら研究を進めて行くことを目的とした。

近年ストゥルムフェルスやミハルキンなど多くの研究者によって研究されているトロピカル代数幾何も、代数多様体の研究を組合せ論的問題に帰着させるもので、トーリック多様体の理論と非常に関連が深い。国内でトロピカル代数幾何について深い研究を行っている梶原健を分担者に加え、代数多様体の退化の問題との関連も含めて、トロピカル代数幾何についても研究を行うことを目的とした。また、トーリック・ファノ多様体はトーリック多様体の中でも特によく研究されているものであり、その分類もかなり進んでいる。本研究では、トーリック・ファノ多様体に関する国内最高の研究者である佐藤拓を分担者加えて、さらなるトーリック・ファノ多様体の分類の推進や得られた分類の様々な応用についても研究することも目的とした。

3. 研究の方法

この研究は代数幾何学、可換環論、組み合わせ論に深く関係している。国内外に關係する研究者は多いので、研究集会などに参加して互いの最新の研究成果を交換して研究を促進する。また、この研究に関連した書籍が毎年多数出版されるので、それらのうち重要な

ものを選択して購入し研究に用いることとした。分担者と連携研究者には次の様に役割を分担した。

石田は実扇などの組み合わせ論と関係した部分を調べると共に、計算機を用いて扇上の複体によるコホモロジー群の計算など、具体的な計算にも取り組む。また、この研究の総括も行う。

雪江は概均質ベクトル空間商空間とモジュライ理論の関係について研究する。

花村はトーリック多様体のカテゴリーにおけるモチーフ理論の構成の可能性について研究する。

凸多面体は射影的トーリック多様体とそのアンブルな直線束を与えるが、その完備線形系が射影空間への埋込みを与えるとは限らない。尾形はこの直線束から得られる正規次数付き環がいつ次数 1 の成分で生成されるか、また定義イデアルがいつ 2 次式で生成されるかなどを研究する。

原は可換環の性質を調べるための様々な不変量について、トーリック多様体の場合を重要な具体例として計算して一般論への還元をめざす。

梶原は扇の理論と対数スキームの理論との関係を中心に調べる。また、トロピカル代数幾何との関連についても調べる。

足利はこれまでに一般型の代数曲面や代数曲線の退化について深く研究を行っており、退化をトーリック多様体の族の中で実現することを中心に応用の研究を行う。

高橋もこれと同様に不変量を指定した一般型代数曲面の構成にトーリック多様体の族を用いて実現を図る。

また、土橋は代数多様体の分岐被覆の問題をトーリック多様体への埋込みと超幾何微分方程式の理論を用いて研究する。

佐藤はトーリック・ファノ多様体の分類をさらに進め、さらに得られた分類を用いた多種の研究を行う。

4. 研究成果

石田はトーリック多様体や凸多面体、接続層のコホモロジー群の記述などの研究を行った。特に半群環の局所コホモロジー群と射影的トーリック多様体上の微分層のコホモロジー群に関する消滅定理との関係について、錐から構成される複体を用いて解明した。さらに実空間の扇について、半群環を拡張した可換環を考え調べ、その双対化複体の記述を与えた。さらに実空間の有界とは限らない凸多面体による分割から得られる局所有限型のスキームについても調べた。

尾形は、トーリック多様体上のアンブル直

線束の正規生成性について研究した。特に、3次元の非特異トーリック弱ファノ多様体上のアンブル直線束がすべて正規生成であることを証明した。また、トーリック多様体上のアンブル直線束のベリーアンブル性と正規性について、対応する整凸多面体が2つの多面体のミンコフスキー和になっている場合について調べた。 n 単体と線分のミンコフスキー和の場合 3次元の幅 1 の多面体の正規性の判定法を見つけ、4次元以上ではベリーアンブルな多面体で n の2乗倍しても正規でない例を構成した。

原は正標数の非特異代数多様体のフロベニウス射が経由する正規代数多様体のもつ F -sandwich 特異点について、 F -正則性や大域的 F -正則性との関連を中心に研究した。また、 F -正則でない F -sandwich 曲面において、 F -爆発と最小特異点解消とが一致しない特異点の例を構成した。

足利は一般次元の循環商特異点のトーリック解消を統制する高次元連分数を研究した。

高橋は有理曲線および楕円曲線上の3次元射影空間束のある種の相対2次超曲面の分類に関して結果を得た。

梶原はおもにトロピカル非特異トーリック多様体内の超曲面が固有に交わる場合の交点重複度のトロピカルな公式、および、固有に交わらない場合を含めて交叉積を扱う研究、さらに、対数構造を応用したピカル多様体のコンパクト化の研究をおこない成果を得た。

その他概均質ベクトル空間関連の研究を行った雪江など、連携研究者もそれぞれ担当分野について、トーリック多様体理論の応用に関連した研究を行い成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

1. N. Hara, F -blowups of F -regular surface singularities, Proc. AMS, 出版決定(査読有)

2. T. Takahashi, Certain relative quadric hypersurfaces in 3-dimensional projective space bundles over a projective curve, Geom. Dedicata., Published on line: 14 Jan. 2011(査読有)

3. T. Ashikaga, Local signature defect of fibered complex surfaces via monodromy and stable reduction, Comment. Math. Helv. 85 (2010), 417–461 (査読有)

4. D. Kondo and S. Ogata, On multiplication maps of ample bundles with nef bundles on toric surfaces, *Interdisc. Inform. Sciences* 14(2008),183–190. 査読有

〔学会発表〕(計 18 件)

1. 足利 正, Higher-dimensional continued linear fractions for cyclic quotient singularities, Workshop on Singularity, 2011 年 1 月 22 日, 東京理科大学

2. 尾形 庄悦, Monkowski sums of lattice polytopes and their normality, 54th Annual Meeting of the Australian Mathematical Society, 2010 年 9 月 28 日, The University of Queensland, オーストラリア

3. 石田 正典, On affine semi-normal toric varieties, Fudan-Tohoku Joint Workshop on Algebraic Geometry, 2010 年 5 月 31 日, Fudan University, 中国

4. 梶原 健, 付値環に関するある有限性について, 研究集会「トロピカル幾何と計算代数」, 2010 年 1 月 4 日, 神戸大学理学部

5. 石田 正典, Complexes on not necessarily normal toric varieties, 東北復旦代数幾何合同シンポジウム, 2009 年 11 月 26 日, 東北大学大学院理学研究科

6. 高橋 知邦, Algebraic surfaces with pencils of non-hyperelliptic curves of genus 4, 研究集会 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics, 2009 年 3 月 11 日, 広島大学理学部

6. 研究組織

(1)研究代表者

石田 正典 (ISHIDA MASANORI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 30124548

(2)研究分担者

尾形 庄悦 (OGATA SHOETSU)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90177113

雪江 明彦 (YUKIE AKIHIKO)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 20312548
(H20→H22:連携研究者)

花村 昌樹 (HANAMURA MASAKI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60189587
(H20→H22:連携研究者)

原 伸生 (HARA NOBUO)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90298167
(H20→H22:連携研究者)

梶原 健 (KAJIWARA TAKESHI)
横浜国立大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号: 00250663
(H20→H22:連携研究者)

足利 正 (ASHIKAGA TADASHI)
東北学院大学・工学部・教授
研究者番号: 90125203
(H20→H22:連携研究者)

土橋 宏康 (TSUCHIHASHI HIROYASU)
東北学院大学・教養学部・教授
研究者番号: 00146119
(H20→H22:連携研究者)

高橋 知邦 (TAKAHASHI TOMOKUNI)
一関工業高等専門学校・准教授
研究者番号: 50259793
(H20→H22:連携研究者)

佐藤 拓 (SATO HIROSHI)
岐阜聖徳学園大学 経済情報学部 准教授
研究者番号: 20433310
(H20→H22:連携研究者)