

研究種目：基盤研究 (B)
 研究期間：2007～2010
 課題番号：19340009
 研究課題名 (和文) 数学・物理学の様々な局面で現れるモジュラー・準モジュラー形式の総合的研究
 研究課題名 (英文) Studies on modular and quasimodular forms arising in various contexts in mathematics and physics
 研究代表者
 金子 昌信 (KANEKO MASANOBU)
 九州大学・大学院数理学研究院・教授
 研究者番号：70202017

研究代表者の専門分野：整数論
 科研費の分科・細目：数学・代数学
 キーワード：モジュラー形式, 準モジュラー形式

1. 研究計画の概要

数学および物理学の様々な局面に登場する一変数のモジュラー形式, 準モジュラー形式について, 何故それがモジュラーになるのか, 何故そこにモジュラー形式が現れるのか, という問題意識を根底におきながら, 連携研究者それぞれの専門に立脚しつつ, 連絡をとりながら研究を進める. 具体的には

- (1) 超幾何型の微分方程式の解になっているようなモジュラーおよび準モジュラー形式の研究
- (2) 多重ゼータ値と多重アイゼンシュタイン級数の研究
- (3) 楕円モジュラー関数, トンプソン級数の研究
- (4) 共形場理論, ミラー対称性, 位相不変量などに現れるモジュラー形式の研究などを骨子とする.

2. 研究の進捗状況

(1)については, $SL(2, \mathbb{Z})$ の場合およびレベルの小さなヘッケの合同部分群の場合に以前行ってきたことをレベル 2, 3 のフリッケ群の場合に行った. この場合, ヘッケ群では見られないような, $SL(2, \mathbb{Z})$ の場合との強い類似が見られる. (2)は, これまでの二重アイゼンシュタイン級数とモジュラー形式の間の密接な関係を一般化するべく, 三重アイゼンシュタイン級数のいわゆるシャッフル積に関する計算を行い, 形式的な部分はある程度二重アイゼンシュタイン級数と並行した議論が出来ることを確かめた. (3)については, まず, 楕円モジュラー j -関数やそのレベル 2, 3 での類似物について, 通常の q 展開ではなく, ある特定のモジュラー関数で展開し

たときの係数の 2 進位数について著しい明示的公式を見つけた. 類似のことが 3 進的にも成り立つことをいくつか確かめている. またエクストリーマルなモジュラー形式とあるテータ級数の間の 2 べき, 3 べきを法とする合同式を見出した. 応用としてエクストリーマルなモジュラー形式のある分数べきが整係数になることを示した. さらに, 楕円モジュラー j -関数の実二次点での「値」を, その点での双曲的フーリエ展開の定数項として定義し, その値の数値計算と, 基本的な性質の証明を行なった. 数値計算の示唆する所は非常に興味深く思われ, ディオファントス近似からの観点からの考察と, マルコフ数に関連する実二次数での値の実験と考察を行なった. (4)は, 楕円曲線上の共形場理論におけるモジュラー性, Gromov-Witten 不変量のモジュラー性についての幾何学的理解が進みつつある. s_{12} の制限量子群からある方法で結び目不変量を構成し, 色つきアレキサンダー多項式, また共形場理論との関係を論じた. これらはいずれもモジュラー形式, また擬モジュラー形式との関係が深い対象でありその明示的な関係を見つけることが課題である.

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している.

(理由) (1)については当初計画通りに進んでいるが, (2), (4)は計算上の困難が予想以上に大きいなど, これまでのところ当初の見込みを下回る達成度であるが, これからの努力により到達可能な範囲と考える. (3)は当初計画以上に進展している. フーリエ係数の p 進的研究も順調であるが, 新たに実二次点で

の値に関する研究について非常に興味深い方向が示されつつある。

4. 今後の研究の推進方策

著しい成果の一つである楕円モジュラー関数の実二次点での値に関する研究を重点的に推し進める。上記(2)については、最近同様の研究が進められていると聞くイギリス・ダーラム大学の H. Gangl のグループの研究の情報を収集しながら、理論的な観察で計算の簡易化が図られないかを調べていく。

(3)では Atkin の方法で構成される 2 進的保型形式との関連を追求する。(4)の観点については連携研究者間の連絡をより密にして、モジュラー形式を軸とするお互いの連関を更に探っていく。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 29 件)

- ① M. Kaneko, Observations on the `Values' of the elliptic modular function $j(t)$ at real quadratics, *Kyushu J. Math.*, 63-2, 353-364, (2009), 査読有
- ② M. Koike, Congruences between extremal modular forms and theta series of special types modulo powers of 2 and 3, *Kyushu J. Math.*, 63-1, 1-10, (2009), 査読有
- ③ S. Hosono and Y. Konishi, Higher genus Gromov-Witten invariants of the Grassmannian, and the Pfaffian Calabi-Yau 3-folds, *Adv. Theor. Math. Phys.*, 13, 1-33, (2009), 査読有
- ④ M. Kaneko, A note on poly-Bernoulli numbers and multiple zeta value, Diophantine analysis and related fields (DARF 2007/2008), *AIP Conf. Proc.*, 976, 118-124, (2008), 査読有
- ⑤ K. Nagatomo and J. Murakami, Logarithmic Knot Invariants arising from Restricted Quantum group, *Int. J. Math.*, 19-10, 1203-1213, (2008), 査読有

[学会発表] (計 79 件)

- ① S. Hosono, BCOV ring and holomorphic anomaly equation, Workshop on Generalized Geometries and String Theory, 2010. 3. 25-28, Brandeis Univ., U. S. A.
- ② T. Takata, On the $SO(N)$ and $Sp(N)$ free energy of a closed oriented 3-manifold, Mapping class groups, TQFT and invariants of 3-manifolds, 2010. 2. 17, 東京工業大学

- ③ M.-H. Saito, The moduli spaces of lambda-connections with singularities and Painleve equation, Algebraic Geometry and Differential Topology Seminar, 2009. 11. 25, A. Re'nyi Institute of Math. Budapest, Hungary
- ④ M. Kaneko, Observations on the `values' of the elliptic modular j -function at real quadratics, International conference on The analytic theory of automorphic forms, 2009. 6. 18, Woudschoten, The Netherlands
- ⑤ M. Kaneko, On the values of the elliptic modular j -function at real quadratics, International workshop on verified computations and related topics, 2009. 3. 9, University of Karlsruhe (TH), Germany

[図書] (計 2 件)

- ① 金子昌信, 境隆一, 講談社サイエンティフィック, 「暗号の整数論」, (2009), 56 ページ.
- ② 金子昌信, 佐伯修, 谷口説男, 二宮嘉行, 福本康秀, 若山正人, 岩波書店, 「技術に生きる現代数学」, (2008), 103-131.