様式 C-7-2

自己評価報告書

平成２２年　４月　９日現在

研究種目：基盤研究　（B）
研究期間：2007 年～2010 年
課題番号：19340012
研究課題名（和文）微分式系と階別単純リー環に附随する幾何構造の研究

研究課題名（英文）Research on Differential Systems and Geometric Structures Associated with Simple Graded Lie Algebras

研究代表者
山口　佳三（YAMAGUCHI KEIZO）
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：00113639

研究代表者の専門分野：微分幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分式系、階別単純リー環、接触幾何学、包合系

１．研究計画の概要

この研究の目的は、大きく分けて２つからなる。１つは、微分式系の概念を通じて偏微分方程式系を幾何学的（接触幾何学的）に研究することであり、もう１つは、階別単純リー環に付随する幾何構造の研究と、その微分式系の幾何を媒介とした偏微分方程式系との関連を調べることにある。詳しくは、最初の課題は、微分方程式系をジェット空間の部分多様体として幾何学的対象ととらえて、接触同値問題を核に微分幾何学および特異点論の手法で研究することにある。第２の課題は、階別単純リー環に付随する幾何構造に対して、田中昇氏によって構成された正規カルタン接続の理論のより詳細な個別の構造解明とその応用および発展を諮ることを目的としている。

２．研究の進捗状況

これまでの３年間を通して、ほぼ予定通りの研究が進展している。

初年度は、背足の原理から導かれる、有限型微分方程式系の中で、無限小接触自己同型群が例外的に豊富となるクラスの研究を行った。結果的には、２階および３階の常微分方程式の一般化となるこれらのクラスが、階別単純リー環に付随する幾何構造の１系列として見つかり、このクラスの有限型微分方程式系のモデル方程式を具体的に書き上げることに成功した。さらに、上記結果をも含む形で、微分方程式系の２階の接触幾何学の展開に向けての微分式系の導入部分を解説する講義録をまとめて公表した。この講義録では、接触多様体の基本定理であるダルブーの定理、高次ジェット空間の接触変換論の基本であるベックルンドの定理等の証明を与え、E.Cartan によって発見された例外単純群 G2 を接触自己同型として持つ非線形過剰決定系の具体的構成を解説した。

20 年度は、２階１未知関数偏微分方程式系の接触同値問題、特に、G2 型偏微分方程式系の研究の発展と、２階の PD 多様体に対する「簡約化（Reduction）」の過程の整備を行った。特に、コーシー特性系を許容する系に対する、First Reduction 定理を整備し、この「簡約化」によって得られる微分式系を完全に特徴付けた。この特徴付けを用いて、初年度に発見した階別単純リー環に付随する幾何構造の１系列の具体的な微分式系のモデルを利用して、その無限小接触自己同型環が有限次元単純リー環となる、コーシー特性系を許容する２階１未知関数偏微分方程式系を構成した。

21 年度には、二階の接触幾何学における Second Reduction 定理を定式化した。この定理は、E.Cartan の２ないし３独立変数の Involutive な２階１未知関数偏微分方程式系に対する研究を包括するものであり、多独立変数の２階１未知関数偏微分方程式系の表象（シンボル）がどのような性質を持てば、２段階の「簡約化」が可能となるかを明らかにした。これによって、対象となる偏微分方程式系に、多変数のモンジュ特性系が存在する十分条件を与えている。

３．現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。
（理由）
研究の進捗状況に詳述したように、研究目的の第１課題に対しては、２階の接触幾何学

（２階１未知関数偏微分方程式系の接触幾何学的研究）に対する基本定理（First Reduction 定理、Second Reduction 定理）が整備された。これを用いて、階別単純リー環に付随する幾何構造の中で、２階の接触幾何学に密接に関わるものが数多く発見された。第２の課題に対しては、上記で発見されたそれぞれの階別単純リー環に付随する幾何構造に対して、田中理論を用いて、その不変量を調べ始めている。

４．今後の研究の推進方策

最終年度の課題は、まずもって、Second Reduction 定理のさらなる整備であり、この「２段階の簡約化」によって２階微分方程式系より得られた微分式系がどこまで特徴づけられるかが課題となる。さらに、Second Reduction 定理を用いて、２階の接触幾何学に関わる階別単純リー環に付随する幾何構造の例を増やし、これらについて、田中理論を用いて、その基本不変量と２階の微分方程式との関連を明らかにしたい。

５． 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

1 H.Ohta and K.Ono ： An inequality for symplectic fillings of the link of a hypersurface K3 singularity, Banach Center Publ. 85, Polish Acad.Sci. Inst. Math., Warsaw (2009), 93-100 （査読有）.

2 T. Kato and K. Matsumoto ： Some transformation formula for Lauricella’s hypergeometric function FD, Funkcial. Ekvac.52(2009), 203-212 (査読有).

3 H.Furuhata ： Hypersurfaces in statistical manifolds, Differential Geom. Appl. 27(2009), 420-429

4 K.Yamaguchi: Contact Geometry of Second Order I, Differential Equations: Geometry, Symmetries and Integrability; The Abel Symposium 2008, Abel Symposia 5 (2009),335-386 （査読有）.

5 A.A.Davydov, G.Ishikawa, S.Izumiya and W.Z. Sun: Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane, Japanese Journal of Mathematics 3, 93-119 (2008) (査読有).

6 S.Izumiya and F. Tari: Projections of surfaces in the hyperbolic space to hyperhorospheres and hyperplanes, Revista Matematica Iberoamericana 24, 895-920(2008) （査読有）.

〔学会発表〕（計３件）

1 K.Yamaguchi: Drapeau Theorem for Differential Systems and beyond, Parabolic Geometriy and Partial Differential Equations, University of Auckland, New Zealand 2008 年 8 月 11 日

2 K.Yamaguchi ： Contact Geometry of Second Order, The Abel Symposium 2008 Tromso, Norway 2008 年 6 月 21 日

3 K.Yamaguchi ： Contact Geometry of Second Order, MSRI Workshop; Exterior Differential Systems and the Metod of Equivalence, Berkeley 2008 年 5 月 5 日