

平成 22 年 4 月 30 日現在

研究種目：基盤研究(B)  
 研究期間：2007～2010  
 課題番号：19340015  
 研究課題名(和文) ゲージ理論とホモトピー論

研究課題名(英文) gauge theory and homotopy theory

## 研究代表者

古田 幹雄 (FURUTA MIKIO)  
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
 研究者番号：50181559

研究代表者の専門分野：数物系科学  
 科研費の分科・細目：数学・幾何学  
 キーワード：位相幾何

## 1. 研究計画の概要

(1)本研究の目標は、ゲージ理論を無限次元幾何学としてのホモトピー論的枠組みから理解することである。

(2)直接の対象としては一般に非線形 Fredholm 理論を扱う。方法としてはゲージ理論的側面、ホモトピー論的側面とともに力学系的側面への注目する。対象としては Seiberg-Witten 理論を扱うとともに、Donaldson 理論を試金石とする。

## 2. 研究の進捗状況

(1)Pontrjagin-Thom 構成による非線形 Fredholm 理論の不変量について。主として代表者古田とミネソタ大学の Tian-Jun Li 氏との共同研究である。従来通常は与えられた非線形 Fredholm 写像を摂動することによって解のモジュライ空間の定義方程式の横断性を達成し、それを用いて不変量を定義する。我々のアプローチは、摂動を用いずに、直接不変量を定義するものである。背景には Ruan の仮想近傍のアイデアがある。Ruan は仮想近傍の基本類を構成して不変量を与えたが、我々は接束の捩れた安定自明化として不変量を与える。このホモトピー論的枠組みは、モジュライ空間がコンパクトな場合の定式化は実現された。当初は、カテゴリー論的な用語を利用した定式化を追及していた。しかし、方針を変更し、現在は、それを用いない直接的な定式化がなされている。非コンパクトな場合には、端の形状が簡明である場合にのみ構成されている。次のステップはその一般化と非自明な例の提示である。

(2)Dirac 型作用素の指数の局所化について主として代表者古田と、吉田尚彦・藤田玄氏との共同研究である。線形楕円型方程式の指

数の局所化を与える方法に Witten 変形がある。通常は Witten 変形は有限階数のベクトル束に対して提供される。我々のアプローチは、形式的には、Witten 変形を無限階数の Hilbert 束に適用したものと説明される。我々のひとつの動機は 2 次元ゲージ理論の応用であるが、そのために必要な特異ファイバーからの寄与の計算は、現在最も単純な場合(球面の測地流)にのみなされている。次のステップは、多様な特異ファイバーに対する計算、(応用に必要な範囲における)特異ファイバーの分類である。

(3)ユニヴァースの捩れを伴う例に 3 次元トーラスがある。この捩れが現れる現象を理解する試金石として、トーラス和に関する Seiberg-Witten Floer ホモトピー型の張り合わせ公式を得た。だが、連結和公式に帰着されない、非自明な応用例が見出されていない。

## 3. 現在までの達成度

Dirac 型作用素の指数の局所化について(上記 2(2))着実に進展し、また理論構成の細部(軌道体の扱いなど)において予想以上の精緻な考察が必要となった。

Pontrjagin-Thom 構成による非線形 Fredholm 理論の不変量について(上記 2(1))、原理的側面の理解とともに、それを実現する技術が蓄積されつつある。

パラメータ付きのユニヴァースによる Seiberg-Witten Floer ホモトピー型の捩れの定式化について。はりあわせ公式を得るためには、この捩れの記述が必ずしも必要でないことが明らかになってきた。そのため、捩れを積極的に記述する必要性は減じたといえる。

中心多様体を用いた Floer ホモトピー型の有限次元モデルの構成について。最近、他の研究者によって我々とは異なるアプローチ(無限次元サイクルの使用)が提案された。一方我々のアプローチによる定式化は今だ達成されていない。

#### 4. 今後の研究の推進方策

- (1) 中心課題として取り組む対象を以下のように精選し限定する。
- (2) Dirac 型作用素の指数の局所化については現在の研究をその方針のまま進める。
- (3) PT 構成による非線形 Fredholm 理論の不変量については、2011 年度の Tian-Jun Li 教授との共同研究により、対象をホモロジー 4 球面にまず限定して考察を行う。
- (4) 同時に一方で、中心課題に限定せず、連携研究者達による自由な考察によって研究を活性化する。
- (5) これまでと同様、当該分野について見識の高い研究者を雇用し共同研究を行う。

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

H. Fujita, M. Furuta and T. Yoshida

Torus fibrations and localization of index I, to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo. (2010), available at arXiv:0804.3258 査読有

S. Hayashi, Applications of Mane's C2 connecting lemma, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 1371-1385 査読有

A.J. Bene, N. Kawazumi and R.C. Penner, Canonical extensions of the Johnson homomorphisms to the Torelli groupoid, Adv. Math. 221 (2009), 627-659 査読有

T. Kato, Deformations of real rational dynamics in tropical geometry, Geom. Funct. Anal. 19 (2009), 883-901 査読有

T. Tsuboi, On the group of real analytic diffeomorphisms. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 42 (2009), 601-651 査読有

[学会発表](計 2 件)

古田幹雄, 局所化とトーラス束、日本数学会年会トポロジー分科会、特別講演、2010 年 3 月 24 日、慶應大学

坪井俊, 多様体の微分同相群、日本数学会秋季総合分科会、総合講演 2008 年 9 月 25 日、東京工業大学