

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19340019

研究課題名 (和文) 超準解析と計算可能性理論の融合 —ランダム性へのロジカル・アプローチ

研究課題名 (英文) Marriage of non-standard analysis and computability theory toward the light of algorithmic randomness

研究代表者

田中 一之 (TANAKA KAZUYUKI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70188291

研究代表者の専門分野：数学基礎論

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：数学基礎論, 超準解析, 計算可能性理論, ランダム性, ロジック

1. 研究計画の概要

(1) 本研究のメイン・テーマは、超準解析の論理的基礎付けである。これまで集合論をベースに行われていた超準的議論を、計算可能性と結びつけた 2 階算術の弱い体系において実行することにより、命題の構成的な内容まで超準的に得られるようになるはずであるという代表者の着想に基づき、2 階算術の超準解析に対して理論的土台を整備し、その応用範囲を広げていくことを目的とする。

(2) (1)の理論整備を進めるため、2 階算術の超準モデルと、実数集合の計算構造について広い意味での基礎研究を行う。とくに計算可能な閉集合の次数の研究と、2 階算術における種々の決定性公理の比較に関する研究が(1)の理論を深めるために重要と思われるので、それらを重点的に行う。

(3) (1)および(2)の成果を踏まえて、ランダム性の計算論的様相を研究する。決定性アルゴリズムとランダム・アルゴリズムの計算の複雑さの比較や、ランダム性の様々な定義の間の関係を分析する。

2. 研究の進捗状況

(1) 代表者は WKLo の自己埋め込み定理を使って 2 階算術で超準解析を展開する方法を以前から考えてきた。これを、Gaifmann の定理を用いて、ACA₀ 上の超準解析に発展させることが本研究の第一歩である。理論の整備は、代表者の指導学生だった横山啓太が主として遂行し、また学生の堀畑佳宏もいくつか重要な応用研究を行った。さらに、代表者の講演を聴いたベルギーとイギリスの大学院生がそれぞれの学位論文においてこの方面の研究を進めている。

(2) 計算可能な閉集合の次数の研究については、分担者・山崎武の指導のもと、大学院生の本原貴行が目覚ましい成果をあげている。また、強い体系と決定性公理の関係については、代表者の指導のもと、元学生の根元多佳子と MedSalem が重要な成果を得た。

(3) 代表者と指導学生の劉晨光、及び分担者の山崎は、ランダムな入力変数をもつブール式の値の評価に対する計算の複雑さを測定し、さらに部分ランダム性の定義に関して多くの調査を行った。これらは、ランダム性の超準的分析に着手する前段階の研究であったが、独自に興味ある研究に発展しており、とくに連携研究者の鈴木登志雄と隈部正博によって新たな知見が得られつつある。

3. 現在までの達成度

① 当初の計画以上に進展している。

【理由】

本研究の主テーマである超準解析の論理的基礎付けは、予想以上の成果を上げた。ACA₀ 上の超準解析が多く応用を伴って成功しただけでなく、超準と標準を関係付ける移行原理について横山や他の研究者が興味深い一般的な結果を多数引き出したからである。超準解析学の大家 H.J. Keisler (Wisconsin) は、最近複数の論文で代表者らの研究を強調して取りあげ、自らも周辺分野を開拓している。なお、横山はこの研究によって青葉理学振興会賞を受賞した。

超準解析以外についても、本研究から多くの研究成果が生まれている。そのいくつかは、今後独立した研究プロジェクトに発展すると思われる。なお、それらに貢献した元学生の根元多佳子は黒田チカ賞、劉晨光は藤野先

生賞を受賞した。

ランダム性については、代表者と指導学生の劉晨光及び分担者の山崎が、ブール式の評価や部分ランダム性の定義について研究した。それらは、まだ超準解析と本質的な結び付きを現していないが、それら自身も価値ある研究と思われるし、超準解析と繋がるのもまもなくと思われる。なお、指導学生劉晨光は、中国に帰国後西安理工大学に「決定分析とアルゴリズム設計」という研究センターを立ち上げ、そこをベースに代表者たちとの研究協力体制を確立している。

4. 今後の研究の推進方策

代表者としては、2階算術の超準解析の手法を用いて、ランダム性の計算論的様相についての研究を進めていきたい。世界的にもアルゴリズム的ランダム性への関心が高まってきたので、我々独自の超準モデルによる分析方法がうまく応用できれば、国際的にも注目される研究になるだろう。

また、最近測度論によらない様々な確率論が提起されており、そのなかには2階算術の超準解析がうまく適用できる理論もある。その方面の超準的議論を発展させれば、ランダム性への新たな知見が得られることも期待される。

この数年間に代表者のもとを巣立った学生たちや、最近代表者と交流をもった若手研究者たちが世界各地で活躍しているので、彼らに協力を仰いで、研究体制をさらに強化して、研究を進めていきたいと思う。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

[1] M. Kumabe, T. Suzuki and T. Yamazaki, Does truth-table of linear norm reduce the one-query tautologies to a random oracle?, Archive for Mathematical Logic 47, 159-180, 2008. (査読あり)

[2] C.G. Liu, T. Yamazaki and K. Tanaka, Generalization of complexity oscillations in infinite sequences, in the 4th International Conference on Natural Computation (ICNC'08), IEEE, pp.299-303, Oct. 2008. (査読あり)

[3] M.O. MedSalem and K. Tanaka, Δ_3^0 -determinacy, comprehension and induction, Journal of Symbolic Logic 72: 452-462, 2007. (査読あり)

[学会発表] (計 15 件)

[1] K. Tanaka, Determinacy, Ramsey Property and Π_2^1 -comprehension, the 10th Asian Logic Conference, Kobe, September 2, 2008.

[図書] (計 6 件)

[1] 田中一之編, 田中一之, 瀧野昌, 松原洋, 戸田山和久著, 『ゲーデルと20世紀の論理学(ロジック)』, 第4巻「集合論とプラトニズム」東京大学出版会 2007.

[その他]

一般向けの解説:

田中一之, 「計算可能性の限界を超えて」, 『科学』77 (2007年10月): 37-44, 岩波書店 2007. 他にも研究分野を紹介する解説文を数編商業誌に発表している。

一般向けの講演:

2009年度に代表者は東京工業大学で一般市民向けに数学基礎論を紹介する講演を2回行った。他にも、種々の小規模勉強会で講師を務めている。

ウェブページ:

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~tanaka/tanahome.html>