

機関番号：11301  
 研究種目：基盤研究（B）  
 研究期間：2007～2010  
 課題番号：19340019  
 研究課題名（和文） 超準解析と計算可能性理論の融合 --ランダム性へのロジカル・アプローチ--  
 研究課題名（英文） Marriage of non-standard analysis and computability theory toward the light of algorithmic randomness  
 研究代表者  
 田中 一之（TANAKA KAZUYUKI）  
 東北大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号：70188291

研究成果の概要（和文）：本研究の主題は、超準的手法の論理的基礎付けである。従来集合論をベースに行われた超準的議論を、計算可能性と結びついた2階算術の弱い体系において実行することにより、命題の構成的な内容まで超準的に得られるようにする。代表者が考案した2階算術の超準的方法論の改良と整備を行いながら、2階算術の超準モデルを研究し、同時に実数集合の計算構造について探査する。とくに、ランダムな無限列としての実数とその集合の性質を調べる。

研究成果の概要（英文）：The main purpose of this research is to lay a logical foundation for non-standard arguments, which have been developed in abstract set theory traditionally. Basing non-standard methods on weak subsystems of second order arithmetic connected with computability, we can obtain constructive contents of propositions by such methods. To device non-standard methods for second order arithmetic, we need to investigate their non-standard models, which are indeed sets of reals (infinite sequences). Amongst the sets of reals, many contain many random elements, which we also explore in this study.

#### 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	4,700,000	1,410,000	6,110,000
2008年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
2009年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2010年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
総計	13,500,000	4,050,000	17,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数学基礎論，超準解析，計算可能性理論，ランダム性，ロジック

#### 1. 研究開始当初の背景

本研究の主題は、超準解析の論理的基礎付けである。従来集合論をベースに行われていた超準的議論を、計算可能性と結びついた2階算術の弱い体系において実行することにより、命題の構成的な内容まで超準的に得られるようにする。

歴史を振り返ると、超準解析(超準的手法の

解析学)の創始者 A. Robinson が1973年にプリンストン高等研究所で講演したときに、K. Goedel は超準解析こそが「未来の解析学」となるものと賞賛した。しかし、超準解析の厳密な形式化には本質的に困難な部分があり、超準的手法を用いた2階算術のフル体系の議論は2階算術内に収まらないことが、Henson と Keisler らによって1980年代に指摘された。そこで、代表者は2000年前後に

超準的な手法を制限した形(移行原理)で使う枠組み(モデル)を2階算術の部分体系 WKLo に対して作った. この方法の有用性は次第に明らかになり, 最近もいろいろな論文で取り上げられている.

本研究は, 代表者が考案した WKLo の自己埋め込み定理を, Gaifmann の定理を用いて ACAo 上の超準解析に一般化し, 2階算術の超準的方法論の整備を行うことから始める. さらに理論の整備を進めるため, 2階算術の超準モデルと, 実数集合の計算構造について基礎的なつながりを研究する. とくに計算可能な閉集合の次数の研究と, 2階算術における決定問題に関する研究を行う. 閉集合の点の複雑さに関する研究は古くから行われてきたが, 近年になると, 点の計算可能性に及ぼす位相的性質が注目されはじめた. また, 次数の束構造の研究もここ10年くらい盛んな領域である.

以上の研究を踏まえ, その発展としてランダム性の計算論的様相を研究する. 決定性アルゴリズムとランダム・アルゴリズムの計算の複雑さの比較や, ランダム性の様々な定義の間の関係を分析する. アルゴリズム的ランダム性の研究は, ここ数年目覚ましく発展している.

## 2. 研究の目的

(1) 本研究の第一の目的は, 超準解析の論理的基礎付けである. これまで集合論をベースに行われていた超準的方法を, 2階算術の弱い体系において展開する. とくに WKLo に関する技法を ACAo に一般化することで, いくつかの重要な定理を超準的に導く.

(2) 第2のテーマである計算可能な閉集合については, 様々な還元関係の性質, とくに Medvedev 次数の決定可能性についての未解決問題に挑む. また, 計算可能閉集合を2階算術の部分体系で形式的に扱い, モデル論や証明論などのメタ数学の手法を導入する. カントル空間上の測度が0でない計算可能な閉集合は本質的にあらゆるランダム性に対するランダム列を要素にもつことが知られているが, さらに測度が0でないものがなす部分構造の性質について調べる.

(3) 第3の研究テーマは, ランダム性の計算論的研究であるが, これはさらに二つに分かれる. 一つは, ランダムな入力変数をもつブール式の値の評価において, 通常決定性アルゴリズムとランダム・アルゴリズムの間の計算の複雑さを比較することである. これらについて, 超準的手法を応用すべく研究を進める.

## 3. 研究の方法

本研究は, およそ3つの小課題を研究代表者と分担者を中心に, 多数の連携研究者と国内外の協力者と協同して研究計画を遂行する. とくに, ベルギー, シンガポール, 中国とは, これまでの研究室交流の実績を活かして協力体制をさらに強化する. また毎年1回は国際的な会議を招集して, 本研究の関係者が情報交換し, 研究状況の確認をできる機会を設ける.

2007年度には, Ken Zeger 教授(UCSD), Frank Stephan 博士(Singapore), Ted Slaman 教授(UCB)を東北大学のセミナーに招いた. 2008年2月には Steve Simpson 教授(Penn State)他を招いて, 松島で研究集会を行った.

2008年度には, 2つの国際ワークショップ(東北大2009年2月 Carl Mummert (Michigan) 他の参加, 松島3月 Steve Awodey (Carnegie Mellon) 他の参加)を開催した.

2009年度は, 海外協力者の劉晨光教授が統括する西安理工大学の研究センター「決定分析とアルゴリズム設計」との交流を進めた. 2010年2月には Wu Guohua 博士(Singapore)を招き, 猪苗代で会議を行った.

2010年度は最終年度として, 2011年2月に黄天楽博士(Birmingham/Singapore)らを招き, 40名程度の研究集会を秋保で開催した.

## 4. 研究成果

本研究の第一課題である, 超準解析の論理的基礎付けについては, 研究代表者の指導学生である横山啓太が, Gaifmann の定理を用いた ACAo 上の超準解析の理論的整備を行った. 彼は, この研究により青葉理学振興会賞を受賞している. さらに, 研究代表者の指導学生の堀畑佳宏が共同研究に加わり, 超準的手法を用いた複素解析の論理的基礎を築いた.

第2のテーマである計算可能な閉集合については, 同じく博士課程学生の木原貴行が Medvedev 次数の決定可能性について, 2つの量化記号しか含まない文の真偽が決定可能であることを示し, これによって Medvedev 束に関する問題を解決した. さらに平面上のコンパクト単連結実効閉集合が, 常に計算可能な点を持つかという問いに対して, 木原は否定的な解を与えた. これらにより, 木原は川井賞を受賞した.

第3のランダム性の計算論的研究においては, 代表者の学生劉晨光と代表者協力して, ランダムな入力変数をもつブール式の値の評価において, 通常決定性アルゴリズムとランダム・アルゴリズムの間の計算の複雑さを厳密に比較した. 劉晨光は魯迅を記念した藤野先生賞を受賞している. また, 超準的手法を用いたランダム性の研究についてはまだ研究が途中であるが, 測度論を使わない超

準確率論を2階算術で展開することで、ランダム性への新たな知見が得られることが期待される。

測度論を使わない確率論においては、ゲームの決定性が重要な役割を担う。そのため、代表者は、ゲームの決定性の論理的分析、とくに必勝法の複雑さの研究を進めた。この研究については、指導学生の根元多佳子が素晴らしい成果をあげて、青葉理学振興会黒田チカ賞を受賞した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

- [1] K. Tanaka, A note on multiple inductive definitions, in the Proceedings of the 10th Asian Logic Conference, World Scientific, 査読有 pp.345-352, 2010.
- [2] N. Peng, T. Yamazaki, K. Tanaka and C.G. Liu, A Lemma on K-random Extension, Proc. ICCEE 2010 (Chengdu), 査読有 v.7, 353-357, 2010.
- [3] ChenGuang Liu, Kazuhiko Yasuda, Yong Yin, K. Tanaka, Uncertain Association Rule Mining Approach for Cell Formation Problem in Cellular Manufacturing Systems. International Journal of Production Research, 査読有 47(3): 667-685, 2009.
- [4] ChenGuang Liu, Lin Zhu, K. Tanaka, An Algorithm for the Design of Manufacturing Cells. The 5th IEEE International Conference on Natural Computation, China, August 14-16, 査読有 pp. 207-211, 2009.
- [5] M.O. MedSalem and K. Tanaka, Weak determinacy and iterations of inductive definitions, in the Proc. of Computational Prospects of Infinity, World Scientific, 査読有 pp.333-353, 2008.
- [6] C.G. Liu, K. Tanaka and Y. Yin, A cell formation algorithm incorporating practical production factors. The 11th IEEE International Symposium on Scientific and Engineering Computing (SEC-08), Brazil, July 16-18, 査読有 pp.170-175, 2008.
- [7] C.G. Liu, T. Yamazaki and K. Tanaka, Generalization of complexity oscillations in infinite sequences, in the 4th International Conference on Natural Computation (ICNC'08), IEEE, 査読有 pp.299-303, Oct. 2008.
- [8] C.G. Liu, K. Tanaka and T. Yamazaki,

The quasi-equivalence between the definitions of partial randomness, in the 4th International Conference on Natural Computation (ICNC'08), IEEE, 査読有 pp.371-375, Oct. 2008.

[9] C.G. Liu and K. Tanaka, Complexity Oscillations in Random Reals, IEICE Transactions on Information and Systems, 査読有 91 (10), pp. 2517-2518, Oct. 2008.

[10] M. Kumabe, T. Suzuki and T. Yamazaki, Does truth-table of linear norm reduce the one-query tautologies to a random oracle?, Archive for Mathematical Logic 査読有 47, 159-180, 2008.

[11] C.G. Liu, T. Yamazaki and K. Tanaka, Generalization of complexity oscillations in infinite sequences, in the 4th International Conference on Natural Computation (ICNC'08), IEEE, 査読有 pp.299-303, Oct. 2008.

[12] C.G. Liu and K. Tanaka, Eigen-distribution on random assignments for game trees, Inform. Proc. Letters, 査読有 142 (2): 73-77, 2007.

[13] C.G. Liu and K. Tanaka, The computational complexity of game trees by eigen-distribution, Lecture Notes in Computer Science, 査読有 4616: 323-334, 2007.

[14] C.G. Liu and K. Tanaka, The complexity of algorithms computing game trees on random assignments, Lecture Notes in Computer Science, 査読有 4508: 241-250, 2007.

[15] T. Nemoto, M. O. MedSalem and K. Tanaka, Infinite games in the Cantor space and subsystems of second order arithmetic, Mathematical Logic Quarterly 査読有 53: 226-236, 2007.

[16] M.O. MedSalem and K. Tanaka,  $\Delta_3$ -determinacy, comprehension and induction, Journal of Symbolic Logic 査読有 72: 452-462, 2007.

[学会発表] (計 18 件)

[1] K. Tanaka, A Lemma on K-random Extension, ICCEE2010 (University of Electronics Science and Technology of China) 中国成都, 2010年11月18日, 中国電子科学技術大学.

[2] K. Tanaka, An Algorithm for the Design of Manufacturing Cells, 5th ICNC and 6th FSKD, 中国天津, 2009年8月14日, 天津理工大学.

[3] K. Tanaka, Determinacy, Ramsey Property and  $\Pi_1^2$ -comprehension, the 10th

Asian Logic Conference, 神戸, 2008年9月2日, 神戸大学.

[4] K. Tanaka, The computational complexity of game trees by eigen-distribution, Combinatorial Optimization and Applications, First International Conference, COCOA 2007, 中国西安, 2007年8月14日, 西安交通大学.

[図書] (計8件)

[1] 田中一之編, 田中一之, 鹿島亮, 山崎武, 白旗優著, 『ゲーデルと20世紀の論理学(ロジック)』, 第3巻「不完全性定理と算術の体系」東京大学出版会 2007, 全296ページ(田中執筆 pp.1-36, 鹿島執筆 pp.37-114, 山崎執筆 pp.115-204).

[2] 田中一之編, 田中一之, 渕野昌, 松原洋, 戸田山和久著, 『ゲーデルと20世紀の論理学(ロジック)』, 第4巻「集合論とプラトニズム」東京大学出版会 2007, 全318ページ(田中執筆 pp.1-28)

[3] 田中一之訳解説『ゲーデルの定理』(原著トルケル・フランセーン), みすず書房, 2011, 全250ページ.

[その他]

一般向けの解説:

[1] 田中一之, ランダムネスと論理学, 『数学セミナー』査読無 2011年2月号, pp.8-12, 2011.

[2] 田中一之, 「逆数学と超準的手法: 代数学の基本定理を題材として」, 日本科学哲学会『科学哲学』査読有 40-2: 13-22, 2007.

[3] 田中一之, カントルと集合論, 『数理科学』査読無 2011年3月号, pp.77-83, 2011.

[4] 田中一之, 計算可能性の限界を超えて, 『科学』査読無 77(2007年10月): 37-44, 岩波書店 2007.

一般向けの講演:

2009年度に代表者は東京工業大学で一般市民向けに数学基礎論を紹介する講演を2回行った. 2010年にも同様に1回行った.

[産業財産権]

○出願状況 (計 0件)

○取得状況 (計 0件)

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 一之 (TANAKA KAZUYUKI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 70188291

(2) 研究分担者

山崎 武 (YAMAZAKI TAKESHI)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 30336812

(3) 連携研究者

服部 哲哉 (HATTORI TETSUYA)

慶応大学・経済学部・教授

研究者番号: 10180902

小澤 正直 (OZAWA MASANA0)

名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号: 40126313

鈴木 登志雄 (SUZUKI TOSHIO)

首都大学東京・大学院理学研究院・准教授

研究者番号: 30235973

黒田 覚 (KURODA SATORU)

群馬県立女子大学・文学部・准教授

研究者番号: 30300586

隈部 正博 (KUMABE MASAHIRO)

放送大学・教養学部・准教授

研究者番号: 70255173

鹿島 亮 (KASHIMA RYO)

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・准教授

研究者番号: 10240756