様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２４年５月３１日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究（B）
研究期間：2007 ～ 2010
課題番号：１９３４００３６
研究課題名（和文） 拡散方程式の解の形と漸近解析

研究課題名（英文） Shape of the solutions and asymptotic analysis for the diffusive equations

研究代表者
石毛 和弘（ISHIGE KAZUHIRO）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：９０２７２０２０

研究成果の概要（和文）：拡散方程式の解の形について詳しい解析を行い、特に解の最大点挙動と正値調和関数との関係を明らかにした．さらに、半線形熱方程式の漸近解析を行い、爆発問題における爆発集合の位置についての特徴付け、大域解の漸近形と解との誤差評価等の研究を行った．

研究成果の概要（英文）：We study the shapes of the solutions of diffusive equations, and reveal the relationship between the movement of hot spots and the harmonic functions. Furthermore we studied the asymptotics of the solutions for the semilinear heat equations. In particular, we characterized the location of blow-up set for blow-up solutions, and also gave the decay estimates of the deference between global in time solutions and their asymptotics.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2007 年度	3,700,000	1,110,000	4,810,000
2008 年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2009 年度	4,500,000	1,350,000	5,850,000
2010 年度	2,100,000	630,000	2,730,000
年度			
総 計	13,800,000	4,140,000	17,940,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：熱方程式、最大点挙動、等高面、大域的挙動、爆発問題

１．研究開始当初の背景

拡散方程式、特に熱方程式は数学に限らず多くの分野で取り扱われている方程式の一つであり、最も重要な偏微分方程式の一つであることから多くの研究がなされてきた．拡散方程式の解の漸近解析には、熱方程式の基本解や固有関数も用いる古典的手法が広く知られている．一方、半線形拡散方程式などの非線形拡散方程式に対して、解の自己相似性に着目し、ある種のコンパクト性を回復することによって漸近挙動を研究することが、ここ２０年において国内外を問わず多く為され、多くの成果を挙げている．また、別の解析手法として、定常解の詳しい構造を解析し、その安定性・不安定性を研究することによって、解の漸近挙動を調べるといった解析手法も大いに進展し、国内外を問わず数多くの研究グループが存在し、今後の進展が多いに期待されている．特に、これら２つの解析手法は、半線形拡散方程式の研究の核となってきた問題の一つである爆発問題において大きな成果を挙げている．

一方、拡散方程式の解の形状についての研究では、基本解や固有関数、または漸近解析によって得られる自明な結果以上のものはあまり為されていないのが現状であった．実際、解の形状研究において調べられるべき等高面の凸性・非凸性などの幾何学的考察、最大点・最小点の個数やその位置といった基本的な情報について、既存の漸近解析を用いてもその収束ノルムに問題があり、十分な情報を得られないことが多い．さらに、非線形拡散方程式の解の形状という問題は、漸近解析からわかる自明な場合を除き、多くの問題が残されており、今後の進展が求められていた．

２．研究の目的

本研究は線形拡散方程式の解の漸近解析や解の形状について解析し、それらの応用・発展として、半線形拡散方程式の解の爆発問題に代表される様々な非線形拡散現象の解の漸近解析及び解の形状を調べることを目的とするものである．特に、以下の２つの問題について重点的に研究を行う．

(１) 全空間、半空間以外の非有界領域における線形拡散方程式の解の最大点挙動は、固有関数の欠如より、解の最大点挙動を決めるメカニズムが不明だった．研究代表者石毛は球の外部領域という単純な場合ながら、新しい解析手法を作り、詳しい解形状を調べる手法を開発することによって、解の最大点挙動を決めるメカニズムを明らかにしてきた．この解析手法を発展させ、低階項のついた熱方程式の最大点挙動について研究を行う．漸近形から最大点挙動に低階項が影響することが予想されるが、どのように影響するのか、またそのメカニズムを明らかにする．また、この研究を支えるべく解の微分係数の漸近解析も行う．

(２) 半線形拡散方程式の爆発問題は、藤田宏氏の結果より、約 40 年間研究され、多くの成果を存在する．しかしながら、爆発集合の位置という基本的な問題には多くの問題が残っており、その進展が望まれている．石毛は、溝口紀子氏、柳下浩紀氏と協力しながら、ノイマン条件の下、有界領域における半線形拡散方程式の爆発問題の爆発集合の位置の特徴付けを、特に拡散係数が十分大きい場合について研究を行い、線形拡散方程式の最大点の時間無限大の極限、つまり第２ノイマン固有関数の最大点の近くに爆発集合が存在することを示した．このような爆発集合と固有関数の形状を結びつけたこの結果はそれ以前にはないが、線形熱方程式の解の大域挙動が爆発集合の位置の決定と深い関係があることを示唆している．この示唆に基づき、熱方程式の大域挙動と爆発問題の位置との関係について研究を行う．

３．研究の方法

線形拡散方程式の解の微分係数の減衰の速さ、最大点の挙動、等高面の凸性などの解の形状解析を行い、またそれを支える漸近解析の手法を確立させる．その一方で、半線形熱方程式の爆発問題に対して、解の爆発直前まで解の形状を詳しく分析し、爆発現象という非線形現象について研究を行う．特に次の研究を行っていく．

（１）微分係数減衰の速さについて

様々な境界条件の下、変数係数を持つなど様々な線形拡散方程式の解の詳しい形状を調べる準備として、解の微分係数の挙動、特に微分係数の減衰の速さを研究することは重要である．これらの解析には、最も単純な場合には自己相似性を用いた漸近解析が有効ではあるものも、一般には解の正則性の欠落が起こるため上手く解析できない．また、非有界領域の解挙動には、調和関数の形状を知ることが重要であるが、それらは方程式の係数や境界条件の影響を強く受ける．ここでは、その後の半線形拡散方程式への発展を見込んで、ポテンシャル項をつけた線形拡散方程式の場合を扱い、球の外部領域の線形拡散方程式の最大点挙動で成功した解析手法を用いてポテンシャル項の無限遠点での挙動との解の微分係数の減衰速度の関係について解明する．

（２）線形拡散方程式の解の形状について

ポテンシャル項をつけた線形拡散方程式に代表される拡散方程式の解の最大点挙動について解明する．最大点が有界に留まるならばその極限、無限に発散するならばその発散する速さと方向等について明らかする．また、十分時間が経った後、最大点の個数が一つになるのはどのような場合か考察する．これによってポテンシャル項の無限遠点での挙動や境界条件などと関連した最大点挙動の決定メカニズムを明らかにする．その後、どのような場合に、解の等高面が凸性にあるのか、ということを解明していく．

（３）半線形拡散方程式の爆発問題

線形拡散方程式の解形状の解析により、半線形拡散方程式の爆発問題における爆発時間直前の解形状が解析できる．ここでは、拡散係数が十分大きい場合の爆発集合の位置について解析し、解挙動と爆発集合の関係を解明する．この研究では、全空間の場合を中心に考える．予想される結果としては、線形拡散方程式の最大点挙動からの類推により、初期値の重心の近くでのみ解は爆発するなどの結果が期待される．

４．研究成果
放物型方程式の解の形状に絡み、熱方程式等の解の等高面の凸性、低階項付き熱方程式の解の最大点挙動、半線形熱方程式の爆発集合の位置の特徴付け等の研究を行う一方、非線形熱方程式の大域解の挙動、特に解の漸近形と解との誤差評価等の研究も行い、以下の研究成果を挙げた．

（１）熱方程式の解の微分の減衰評価：ポテンシャル項付き熱方程式の解の微分の時間大域的減衰の速さについて壁谷喜継氏（大阪府立大学）と共に研究を行った．この減衰の速さには対応する正値調和関数の空間無限大での増大が大きく影響することを明らかにし、詳細な減衰評価を与えた．さらに石毛は、ノイマン境界条件下において外部領域における熱方程式の解の微分は解そのもの減衰速度より －１／２ 速く減衰することを証明した．これは全空間では古くから知られた事実であったが、外部領域等の非有界領域においては新しい結果である．また、これらの微分減衰評価は以下で述べる熱方程式の解の最大点挙動の研究に大きな示唆を与える．

（２）熱方程式の解の最大点挙動：２次以上の減衰の速さをもつポテンシャル項付き熱方程式の解の最大点挙動について壁谷喜継氏と共に研究を行った．この解析を通して、対応する正値調和関数の無限遠点における増大度が大きく影響するが、またそれは空間次数とポテンシャルの減衰速度に大きく依存する．このため、ポテンシャル項付き熱方程式の解の最大点挙動の研究には、正値調和関数の形状に関する詳しい解析が必要であり、さらに解とその微分係数の詳細な漸近解析をも必要とする．結果として、空間三次元以上、二次元において最大点挙動は大きく異なることが明らかになり、また、その挙動も詳細に得ることに成功した．また、この研究を応用し、ポテンシャル項付き半線形熱方程式に関する藤田臨界指数の同定にも成功した．これらの研究成果は詳細な漸近挙動を得ることができたことによって可能であったが、本研究以前にポテンシャル項付き熱方程式において詳細な漸近挙動の研究は無いものと認識しており、既存の結果とは一線を画くものであると考えている．また、一連の結果は、２０１０年に雑誌「応用数理」に要約という形で纏められて掲載されている．

（３）解の等高面の凸性：熱方程式の解の等高面の凸性について、パオロ・サラーニ氏(フィレンツェ大学)と共に研究を行った．まず、熱方程式の等高面の凸性が崩壊する例を初めて構成し、等高面の凸性が崩壊するメカニズムを明らかにした．さらに環状領域において、初期値がある条件をみたすならば、熱方程式の解の等高面は凸となる結果が与えられていたが、我々は時空間変数で見たときの解の等高面の凸性について研究を行った．このため、放物型準凸、さらにその拡張である放物型準凸という概念を導入し、解がそれらの性質をもつための十分条件を与えることに成功した．この結果は広範な拡散方程式に適応可能なものとなっている．また、このような時空間変数でみた解の等高面の形状といった研究は全く新しい研究の方向性であり、今後の進展が大いに期待できる．

（４）半線形熱方程式の解の爆発問題：半線形熱方程式の解に対して、拡散係数が十分小さい場合、解の爆発集合が初期値の最大点集合の近くにのみ存在すること示し、さらに初期値のグラフの平均曲率が最小となる最大点の近くにのみ存在することを藤嶋陽平氏(東北大学)と共に示した．この結果は爆発集合の位置と初期値の最大点周りでの曲率との関係を示した初めての結果である。また、拡散係数が十分大きい場合についても藤嶋氏と共に考察を行い、熱方程式の解の最大点挙動と半線形熱方程式の解の爆発集合の位置の間に密接な関係があることも示した．特に、初期値が定数関数に積分量が正の摂動を加えた形で与えられるとき、拡散係数が大きくなるにつれて解の爆発集合は摂動の重心に近づくことを示した。全空間の最も単純な場合でも、爆発集合の位置の特徴付けほとんど解明されていないため、また、解析手法も多くの爆発問題の研究とは異なるため、今後の進展が大いに期待できる．

（５）半線形熱方程式の解の漸近形とその収束の速さ：ポテンシャル項を持つ熱方程式の符号変化する解の大域的挙動について、石渡通徳氏（室蘭工大）と川上竜樹氏(広島大学)との共同研究を行った．解の減衰評価について最善のものを得ようとする場合には適当な重み空間に初期値が属することが必要であるが、その重み、及び解の収束の速さについて最善のものを得ることができた．また、本研究は藤田型に代表される半線形熱方程式にも適応可能であり、合わせてそれらの解析も行った．この結果は広範な半線形熱方程式に適応できる可能性が高く、今後の進展を期待できる．

（６）非線形境界条件下における熱方程式：半空間における非線形境界条件付き熱方程式

は、初期値によって有限時間で爆発することもあり、大域的に存在することもある. 既存の結果では十分条件が与えられているのみであり、その大域解の挙動についての研究成果は無かった. 石毛は、この大域解について川上竜樹氏と共同研究を行い、大域解の分類定理を得ることに成功した. これによると、解の挙動は、有限時間での解が爆発する、自己相似解、熱核の３つに分類することが明らかになり、対応する初期値の構造についても詳細な結果を得ることに成功した.

（７）本研究課題を遂行するために、2009 年 6 月東北大学にて、R. Magnanini、A. Chianchi、柳田英二氏、坂口茂氏と共に解の形状解析に関する国際研究集会「1st Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's」を開催し、イタリアの研究者との緊密な関係を構築した. この国際集会 での研究成果は一つにまとめられ、国際的な雑誌「Discrete Contin. Dynam. System」に掲載され高い評価を得ている.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１９ 件）
1. Kazuhiro Ishige and Paolo Salani、 On a new kind of convexity for solutions of parabolic problems、 Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S、査読有、４巻、２０１１年、８５１－８６４
２. Kazuhiro Ishige and Yoshitsugu Kabeya、Hot spots for the two dimensional heat equation with a rapidly decaying negative potential、 Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S、査読有、４巻、２０１１年、８３３－８４９
３． Kazuhiro Ishige and Paolo Salani、Parabolic quasi-concavity for solutions to parabolic problems in convex rings、Math. Nachr.、査読有、２８３巻、２０１０年、１５２６－１５４８
４．Kazuhiro Ishig and Tatsuki Kawakami、Global solutions of the heat equation with a nonlinear boundary condition、Calc. Var. Partial Differential Equations、査読有、３９巻、２０１０年、４２９－４５７
５．Yohei Fujishima and Kazuhiro Ishige、Blow-up set for a semilinear heat equation with small diffusion 、 J. Differential Equations、査読有、２４９巻、２０１０年、１０５６－１０７７
６． Kazuhiro Ishige and Paolo Salani、Convexity breaking of the free boundary for porous medium equations、Interfaces Free Bound.、査読有、１２巻、２０１０年、７５－８４
７．石毛和弘、熱方程式の解の最大点挙動について、応用数理、査読有、２０巻、２０１０年、２２－３６
８．Kazuhiro Ishige, Michinori Ishiwata, and Tatsuki Kawakami、The decay of the solutions for the heat equation with a potential、Indiana Univ. Math. J.、査読有、５８巻、２００９年、２６７３－２７０８
９．Kazuhiro Ishige and Yoshitsugu Kabeya、Hot spots for the heat equation with a rapidly decaying negative potential、Adv. Differential Equations、査読有、１４巻、２００９年、６４３－６６２
１０．Kazuhiro Ishige、Gradient estimates for the heat equation in the exterior domains under the Neumann boundary condition、Differential Integral Equations、査読有、２２巻、２００９年、４０１－４１０
１１．Kazuhiro Ishige and Paolo Salani、Is quasi-concavity preserved by heat flow?、Arch. Math.、査読有、９０巻、２００８年、４５０－４６０
１２．Kazuhiro Ishige、On the Fujita exponent for a semilinear heat equation with a potential term、J. Math. Anal. Appl.、査読有、３４４巻、２００８年、２３１－２３７
１３．Kazuhiro Ishige and Yoshitsugu Kabeya、Large time behaviors of hot spots for the heat equation with a potential、J. Differential Equations、査読有、２４４巻、２００８年、２９３４－２９６２
１４．Kazuhiro Ishige and Yoshitsugu Kabeya、On the decay rates of the derivatives of the solutions of the heat equations in the exterior domain of a ball、J. Math. Soc. Japan、査読有、５９巻、２００７年、８６１－８９８

〔学会発表〕（計２８件）
１．石毛和弘、Convexity breaking of the free boundary for porous medium equations、The 3rd Scienceweb GCOE International Symposium、２０１１年2月１７日、東北大学
２． 石毛和弘、Blow-up for a semilinear parabolic equation with large diffusion on R^N、4th Euro-Japanese Workshop on Blow-up、２０１０年9月１０日、ライデン
３． 石毛和弘、Global solutions for a semilinear heat equation in the exterior

domain of a compact set、RIMS研究集会「保存則と幾何学的偏微分方程式およびその応用」、２０１０年６月９日、京都大学数理科学研究所
４．石毛和弘、Blow-up for a semilinear parabolic equation with large diffusion on R^N、The second Chile-Japan workshop on nonlinear elliptic and parabolic PDEs、２００９年１２月２日、明治大学
５．石毛和弘、Hot spots for the heat equation with a rapidly decaying negative potential、1st Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's、２００９年６月１６日、東北大学
６．石毛和弘、Movement of hot spots and blow-up problem for a semilinear heat equation、Equadiff 07 minisymposium「Qualitive theory of elliptic and parabolic PDE」、２００８年８月７日、ウィーン
７．石毛和弘、Decay rate of the derivatives of the solutions of the heat equations in the exterior domain of a ball、研究集会「微分方程式についての最近の話題」、２００７年１０月２１日、群馬大学東京オフィス

６．研究組織

(1)研究代表者

石毛　和弘（ISHIGE KAZUHIRO）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：９０２７２０２０

(2)研究分担者

小川　卓克（OGAWA TAKAYOSHI）
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：２０２２４０１７
（Ｈ２０→Ｈ２１:連携研究者）

柳田　英二（YANAGIDA EIJI）
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：８０１７４５４８
（Ｈ２２：連携研究者）