

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19340039

研究課題名（和文） パンルヴェ系の理論とその新展開

研究課題名（英文） Theory of the Painlevé systems and its new development

研究代表者

梶原 健司 (KAJIWARA KENJI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：40268115

研究代表者の専門分野：可積分系の理論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系

1. 研究計画の概要

本研究では6種のパンルヴェ微分方程式を典型例とする、有限自由度の可積分な連続・離散・超離散力学系とその一般化であるパンルヴェ系の理論の整備・深化と、得られた成果の他分野への展開を図ることを目的とする。具体的には以下のことに焦点を置く。

(1) パンルヴェ系の理論の整備. 2階のパンルヴェ系について、 τ 関数の理論と特殊解（超幾何解・代数解など）を構成すること、および、補助線形問題(Lax pair)の構成と考察を行うこと。

(2) パンルヴェ系の理論の深化と拡張. パンルヴェ系の解の大域構造を複素力学系的考察によって研究すること、またパンルヴェ系の高階化と多変数化を行い、その階層構造を研究すること。

(3) パンルヴェ系の理論の展開. 離散パンルヴェ系それ自体や、それらの研究から得られた概念・手法を積極的に他分野に展開すること。特に超幾何解と行列積分や Lax pair を通じたランダム行列理論への応用、離散微分幾何などへの応用、 q -UC 階層など新しい可積分系理論の展開などに取り組む。

2. 研究の進捗状況

(1) について、超幾何解については一部のものを除いてほぼ網羅的な結果を得た。代数解については、厳密な意味での存在・非存在にまでは至っていないが、対応するルート系のディンキン図形の自己同形で固定されるタイプの代数解については行列式表示も含め

て具体的に構成できた。補助線形問題については、代数幾何学的な定式化によって、2階パンルヴェ系の頂点に位置する「楕円パンルヴェ方程式」の Lax pair の具体的な構成に成功し、決定的な結果を得た。また、「対称化」と呼ばれる簡約の際に超幾何解に関して現れる不整合の構造を、対称性として現れるアフィンワイル群の表現を駆使して解明し、その副産物としてより一般的な「射影簡約」の概念を提唱した。

(2) について、パンルヴェ VI 型方程式について、リーマン・ヒルベルト対応を通じて複素力学系的・代数幾何学的な考察によって代数解の大域的な構造を詳細に明らかにした。また、UC 階層の相似簡約により、パンルヴェ系・ガルニエ系の一般化を与えるある種のシュレジンガー系を得ることに成功し、組織的な研究が進展中である。

(3) について、 q -UC 階層とその有理解の理論が定式化され、その相似簡約で q -パンルヴェ系とその有理解を普遍指標の特殊化として得た。また、パンルヴェ系の研究で得られた手法を応用して離散ソリトン系の不均一格子上への組織的な拡張に成功し、現在その成果を離散微分幾何に展開中である。さらに、本研究で得られた代数幾何学的理論にヒントを得て、可解カオス系およびその一般解の超離散化に成功し、カオス力学系の理論に対して新たな側面を開拓しつつある。

3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。
(理由)

(1), (2)については当初の計画以上の成果を得た. 特に, 射影簡約に関する研究や楕円パルヴェ方程式の Lax pair の研究, パルヴェ VI 方程式の解の大域構造の研究は予想以上の深みを持った研究に進展した. また, パルヴェ系の高階化と多変数化も大きく発展している. 敢えて言うならば(3)について, ランダム行列理論への展開が計画通りに進展していない. これは(1)の射影簡約の理論の研究の進展, また(3)で離散微分幾何や可解カオス系の理論への展開が当初の予想を遥かに越えて大きく進展したことで着手の時期が遅れたのが理由である. 全体としては当初の計画以上に進展していると判断している.

4. 今後の研究の推進方策

現段階で大きな問題は生じておらず, 計画通りに研究を進める. ランダム行列理論への展開の着手が計画より遅れているが, 既に研究を開始しており, 今年度には何らかの成果を発表できる予定である.

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 38 件)

- ① Kenji Kajiwara, Teruhisa Tsuda and Nobutaka Nakazono, Projective reduction of the discrete Painlevé systems of type $(A_2+A_1)^{(1)}$, International Mathematical Research Notices, in press.
- ② Yasuhiko Yamada, A Lax formalism for the elliptic difference Painlevé equation, SIGMA **5**(2009) 042, 15 pages.
- ③ Katsunori Iwasaki, Finite branch solutions to Painlevé VI around a fixed singular point, Advances in Mathematics **217** (2008) 1889–1934.

[学会発表] (計 52 件)

- ① Kenji Kajiwara, Hypergeometric solutions to symmetric discrete Painlevé equations, Discrete systems and special functions, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, University of Cambridge, 2009年7月3日.

[図書] (計 2 件)

- ①若山正人編, 岩波書店, 可視化の技術と現代幾何学, 2010年, 47–92.