様式C-7-2

自己評価報告書

平成　22年5月24日現在

研究種目：基盤研究（B）
研究期間：2007　～2010
課題番号：19340041
研究課題名（和文）　ツイスター理論による一般超幾何関数とシュレジンガー系の統合理解にむけて
研究課題名（英文）　Toward the unified understand of general hypergeometric functions and general Schlesinger system via Twistor theory

研究代表者
木村　弘信（KIMURA HIRONOBU）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40161575

研究代表者の専門分野：解析学，特殊関数論
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：一般超幾何，一般Schlesinger系，Radon変換，Twistor理論, de Rham理論, 特殊関数

１．研究計画の概要

目的はGrassmann多様体上の一般超幾何関数(HGF)の理論と，monodromy 保存変形によって得られる一般Schlesinger 系(GSS)の理論をTwistor理論の立場から統一して扱うことのできる枠組みの整備すること．課題は

(1) 積分表示に付随するTwisted de Rham 理論の整備.
  ① homology 群とcohomology 群の決定
  ② 付随するGauss-Manin 接続の計算
(2) HGFの大域的挙動.
(3) GSSのレベルでのPenrose変換の構築. Twistor理論において，時空であるGrassmann多様体 $G_{2,N}$とそのTwistor空間である射影空間P^{N-1}の間にKlein対応があり，その上部構造の対応がPenrose変換で，$G_{2,N}$上の一般化された反自己双対方程式(GASDYM)の解と，P^N上のベクトル束でTwistor line上で自明なものの対応を与える．これをGASDYMの特殊解であるGSSのレベルで与える.
(4) GSS の隣接関係および対称性と解空間の構造

２．研究の進捗状況

(1)の課題について．積分で与えられる関数の定義域はGrassmann多様体$G_{r+1,N}$であるが，その中でVeronese点と呼ばれる特別な点を定義し，その点においてcohomology群が$G_{2,N}$上の超幾何積分に対応するcohomology群の外積として得られることを示し，HGFを統御する微分方程式がholonomic系であることを用いて，定義域の一般の点におけるコホモロジー群の次元とpurityを示した．しかしde Rham理論の基礎的な部分は未整備.
(2)の解明はまだ実験段階である.
(3)の課題について．GSSはGASDYMのなかで，Nの分割λで指定されるPGL(N)のある極大可換部分群の$G_{2,N}$への作用によって不変なものとして記述できる．確定あるいは不確定特異点を持つリーマン球面上の線形微分方程式のモノドロミー保存変形によって得られる非線形可積分系は，このGASDYMの特別な解がTwistor空間上のどのようなベクトル束と対応するかというWard対応を明確にするという問題を考えた．この対応をNの分割が(2,1,⋯,1)の場合に確立した．一般の場合には，すべての分割に対応するGSSがFrobeniusの意味で完全積分可能なら対応するベクトル束を構成できることが分かった.
(4)の課題について．特殊関数の問題としては，一般Schlesinger系がどのような特殊解をもつかということが興味深い．　Grassmann多様体$G_{2,N}$上の分割λに対応する一般超幾何関数を種として，同じ分割に対応する一般

Schlesinger系のN-1個のパラメータを含む特殊解の系列がWard-AnsatzというGASDYMの特殊解の構成法を用いて作ることができることを示した.これは2008年にOxford大学のWoodhouseが東京における講演においてその可能性を述べていたことを具体的に実行したものである．この解の構成のために，一般Schlesinger系を与えるモノドロミー保存変形を，GASDYMを与える線形問題の群作用による簡約化として具体的に与えた．さらにlevel k の解をlevel k+1の解に移す変換やlevel k-1に移す変換を与えた．このパラメータをシフトさせる変換が隣接関係と関係があると思われるが，詳細は不明である．

３．現在までの達成度

研究目的の達成状況はやや遅れているという段階にある。それは，計画としてやや欲張った計画を立てたということがある．また，計算機による実験を考えていたが，そのためのスキルの獲得に時間を要していることも原因の一つである．　また，得られている結果を論文として発表することが遅れている．

４．今後の研究の推進方策

現在までに得られている結果を論文としてまとめて発表することが遅れている．この点を推進したい．また，HGF については homologyの理論と de Rham理論を進展させるべく集中的に研究したい. GSS に関しては合流操作によって GSS の可積分性が保たれるかを検証したい.

５．　代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

① Hironobu Kimura, Yoshikatsu Nakamura, Analogue of Ward correspondence for a degenerated Schlesinger system, Kumamoto Journal of Mathematics, 22, 2009, 査読有

② Hironobu Kimura, General Schlesinger systems and their hypergeometric solutions, 数理解析研究所講究録, 1662, 218—230,2009, 査読無

③ Yoshishige Haraoka and Galina Filipuk, Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, J. London Math. Soc. 76, 438-450,2007,査読有

④ K. Iwasaki and T. Uehara, An ergodic study of Painleve VI, Mathematische Annalen, 338, 295-345,2007,査読有

〔学会発表〕（計 2 件）

① 木村弘信, On a problem of arrangements related to the hypergeometric integrals of confluent type, The 2nd MSJ-MI「Arrangements of Hyperplanes」, 2009 年 8 月 11 日, 北海道大学

②木村弘信
On the Schlesinger systems and their particular solutions of hypergeometric type , “ Journees Franco-Japonaises en l'honneur de Kazuo Okamoto : Autour des Equations de Painleve" , 2008 年 11 月 13 日，Strasbourg, France