様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 ２３年 ５月 ３１日現在

機関番号：17401
研究種目：基盤研究（B）
研究期間：2007～ 2010
課題番号：19340041
研究課題名（和文） ツイスター理論による一般超幾何関数とシュレジンガー系の統合理解にむけて
研究課題名（英文） Toward a unified understanding of general hypergeometric functions and general Schlesinger system by twistor theory
研究代表者
木村 弘信（KIMURA HIRONOBU）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40161575

研究成果の概要（和文）：線形微分方程式によって統御される特殊関数の中で，ガウスの超幾何関数をはじめとする一連の重要な関数達を，多変数関数として一般化した一般超幾何関数（HGF）の理論と，線形の方程式の族でモノドロミーを保存するものを記述する非線形方程式である一般シュレジンガー系（GSS）を twistor 理論を用いて統御する研究をした．HGF について特にその積分表示の被積分関数からきまるコホモロジー群を与えた．GSS については，HGF を用いて表される解を構成した．

研究成果の概要（英文）：We studied the theory of general hypergeometric functions(HGF) which generalize important special functions, like as Gauss hypergeometric functions, governed by linear differential equations to functions of several variables. We also studied nonlinear differential equations called general Schlesinger systems(GSS), which describe families of linear systems preserving monodromy data, from the point of view of twistor theory. For HGF, we determined the cohomology groups which are defined using the integrand of the integral representation of HGF. For GSS, we constructed its solutions expressed using HGF.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2007 年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
2008 年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2009 年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2010 年度	2,700,000	810,000	3,510,000
年度			
総 計	11,500,000	3,450,000	14,950,000

研究分野：大域解析学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：関数方程式の大域理論，Yang-Mills，Schlesinger 系，可積分系，超幾何関数，Twistor 理論

１．研究開始当初の背景

研究課題を設定した背景には，一般超幾何関数の理論の進展とmonodromy保存変形によっていられる非線形可積分系のTwistor 理論による研究がある．

(1) 1986 年にGelfand によって導入された Grassmann 多様体$\mathrm{Gr}(r;N)$上の超幾何関数は古典的なGaussの超幾何関数のEuler 積分表示を，$GL(4;\mathbb{C})$ のCartan subgroup の普遍被覆群の指標のRadon 変換と理解することによって得られた．申請者は，1992 年にこれを

Gauss の超幾何関数だけでなく古典的な合流型超幾何関数であるKummer の合流超幾何関数，Bessel 関数， Hermite 関数，Airy 関数を簡単な場合として含む一般超幾何関数(HGF) を導入した．それは，$GL(N;\mathbb{C})$ の正則元の中心化群として得られる極大可換部分群の普遍被覆群を考え，その指標のRadon 変換として得られる．ここで用いられる極大可換部分群のconjugacy class はN の分割を与えることによって指定できる．Jordan 標準形の形をしたタイプλの正則元の中心化群として得られる極大可換部分群H_λと表す．また分割は正則元全体に入る自然なstratification のstrata を指定することにもなっている．Kummer，Bessel，Hermite，Airy はN=4の分割1+1+1+1；2+1+1；2+2；3+1；4 に対応するGr(2;4) 上の一般超幾何関数として把握される．このような視点により，古典的なアプローチでは不可能だったことが単純な形で幾何学的群論的に理解できることが分かってきた．たとえば

① 関数を支配する微分方程式系はRadon 変換を特徴づける超双曲型方程式の系と極大可換部分群の無限小作用を記述した方程式系により与えられる．
② 方程式の対称性が極大可換部分群に対するWeyl 群の類似物のGrassmann 多様体への作用として得られる．
③ 合流操作の群論的，幾何学的理解ができる．つまり正則元全体に，N の分割によってstratum が指定される自然なstratification が入るが，そのstratum の間の近接関係を具体的に実現したものとして合流が理解でき，また具体的な合流操作が得られる．

（２） monodromy保存変形によって得られる非線形可積分系の研究が一般超幾何関数の研究と関連があることを示唆する研究がMason，Woodhouseによって1993年に発表された．これらの非線形方程式の中でもっとも簡単な場合であるPainleve 方程式P6；P5；P4；P3；P2 は，P^1 上の2 階線型微分方程式のmonodromy 保存変形理論によって得られるが，それは2 連立線型方程式の変形から得られるSchlesinger 系（およびその退化した方程式）同等である．Painleve 方程式にはそれぞれ4 の分割1 + 1 + 1 + 1；2 + 1 + 1；3 + 1；2 + 2；4 を対応させる．これは変形される線型方程式の特異点の情報を与えるもので，たとえば2+1+1 は，線型方程式がPoincare rank が1の不確定特異点1 つと確定特異点2つを持つことを表している．しかしながら，一般の分割の場合にどのような形の線型方程式の変形を考えるのが自然なのかということは，これまであまり明確ではなかった．1993 年にMason-Woodhouse は，Painleve方程式達が，複素時空 Gr(2；4) 上の$SL(2;\mathbb{C})$ をgauge 群とする反自己双対Yang-Mills 接続(ASDYM) のなかで，特に$GL(4;\mathbb{C})$ の部分群のGr(2；4) への作用で不変なものとして得られることを示した．このときに用いられた群が一般超幾何関数を定義するときの極大可換部分群である．さらにWoodhouse 達は，ASDYM をGr(2;N) 上に一般化した一般反自己双対Yang-Mills (GASDYM) を扱い，double fibration $P^{N-1} \leftarrow$ Flag(1；2;C^N)→ Gr(2;N) から得られるKlein 対応P^{N-1} ⇔ Gr(2;N) に対するtwistor 理論のWard 対応により，理論構成をtwistor空間P^{N-1} で行うことによって，一般Schlesinger 系を導くmonodromy 保存変形が得られることを示唆した．が，実際の構成はNの分割が1 +… + 1 の場合，すなわち,昔から知られているSchlesinger 系の場合のみで，N の一般の分割。の場合のmonodromy 保存変形は与えられていなかった．2005 年末に申請者はN の一般の分割の場合のmonodromy 保存変形の具体的な記述を得た．これによってGr(2;N) 上で定義された非線型系としての一般Schlesinger 系が与えられた．一旦，具体的な記述ができてみると，一般超幾何関数の理論との類似性が明らかになってきた．

２．研究の目的

Twistor 理論の視点から，Gelfand や申請者によって導入された Grassmann 多様体上の一般超幾何関数(HGF)の理論と，monodromy 保存変形によって得られる一般 Schlesinger 系(GSS)（退化した系も含む）の理論を統一して扱うことのできる枠組みを構築・整備することである．

３．研究の方法

研究の方法に関しては次のような方針を立てて行った．

① Twistor 理論の視点からの見直しを行い，これまで一般超幾何関数について進めてきた研究の視点とを対照させながら研究の多様な可能性を探る．
② Twistor 理論に造詣の深い代数幾何，表

現論，特異点論，可積分系や微分方程式の国内の研究者と連携をとり，関連する話題についての研究交流のための勉強会あるいはセミナーを開く.

③ 関連する情報・資料の収集を行う，特にTwistor 関係のものを重点的に収集する.

④ HGF やGSS の研究においては群論や組合せ論的な性質を調べることが重要なので古典的な具体的な例を検証しつつその性質の一般的な予想を立てる.

（１）一般超幾何関数について.

以下のことを問題として設定した.

① Gr(r;N)/H 上のHGF に付随したde Rham cohomology の具体的な基底の決定.そのためにP^1 上の無限小近傍を持つ点の配置空間からP^r 上の無限小近傍を持つ点の配置空間への写像である一般化されたVeronese map を定義し，その像であるVeronese 点において，Gr(r;N)/H 上のHGF に付随したde Rham cohomologyの外積構造を記述する．その結果得られる基底がすべての点でのcohomology を与えることを証明すること

② 無限小近傍を持つ点の配置空Gr(2;N)/H の基本群の具体的な表示を求めること．これを用いたHGF のmonodromy 表現，不確定特異性におけるStokes 行列を具体的に求めるための簡単な場合における計算実験.

（２）一般Schlesinger系（GSS）について

以下のような問題を設定して研究した.

① Twistor理論におけるWard対応をGSSを与える特殊解のレベルで示す.

② GSSの可積分性の証明を，一般化されたRiemann-Hilbert問題の相対版を構成することによって与える.

③ Riemann-Hilbert 分解の手法を用いたGSS の特殊解の構成.

④ Painleve 方程式等についてこれまで知られているHamilton 構造を考慮にいれながら，twistor 理論の視点からGSS の幾何学的,群論的に自然なHamilton 構造を探る.

⑤ GSS に対するSchlesinger 変換の構成およびHGF の隣接関係との関連を明確にする.

４．研究成果

（１）一般超幾何関数に付随するde Rham cohomology群の決定について.

① P^1 をP^rに埋め込むVeronese map を拡張して,P^1上の無限小近傍を持つ点の配置空間Gr(2;N)/HからP^r 上の無限小近傍を持つ点の配置空間Gr(r;N)/H 上への写像である一般化されたVeronese mapを構成し，Gr(2;N) 上の一般超幾何関数をGr(2,N) 上のそれをつなぐロンスキー行列式公式を与えた.（論文①）

② 一般化されたVeronese map による像の点において，Gr(r;N)上のHGF に付随したde Rham cohomology 群の外積構造の記述を与え，この外積構造から得られる基底がすべての点でのcohomology を与えることを述べた. （論文②）

このようなcohomology群の決定は一般超幾何関数たちの関係式を与える交点理論を構成するときの基礎になるものである.

（２）一般Schlesinger系およびPainleve方程式について

確定あるいは不確定特異点を持つリーマン球面上の線形微分方程式のモノドロミー保存変形によって得られる非線形方程式系のあるクラスは，GASDYMのなかでG_{2,N}へのPGL(N)のNの分割λで指定されるある極大可換部分群の作用によって不変なものとして記述できる.

① Twistor理論において，時空であるGr{2,N}上の一般化された反自己双対方程式の解とtwistor空間と呼ばれる射影空間P^N上のベクトル束でtwistor line上で自明になるものの対応を与えるのがWard対応である．この対応を，Nの分割λが(2,1,…,1)の場合に群H_λの作用で不変なGASDYMの解達とtwistor空間上のGASDYMの解に対応するベクトル束で,群H_λのtwistor空間への作用の持ち上げが存在するもの達の間の対応として確立した.(論文⑥) この結果により，GSSのtwistor 空間における解の構成と時空Gr(2;N)における解の構成が同じものであることが保証される．この結果を一般のNの分割の場合に示すにはGSSの完全積分可能性を示すことが重要である・

② Riemann-Hilbert問題を用いたモノドロミー保存変形可能性，特にGSSの完全積分可能性を保証するために一般化されたRiemann-Hilbert問題のパラメーター付き版，いわゆる相対版を考察した．線形方程式が一位の極のみをもつ場合で，かつモノドロミー表現が既約な場合に，微分方程式の空間と表現の空間

が微分方程式にそのモノドロミーを対応させるという写像によって局所的に双正則に対応することを示すことができた．自動的に得られる非線形系が可積分であることが示せた．不確定特異点をもつ場合に同様のアプローチにより一般Schlesinger系の可積分性を示すことが今後の課題となっている．

③　Gr(2;N) 上のGASDYMに対する接続をNの分割λに対応する群H_λによって変数分離することによって，GSSを与えるmonodromy保存変形を記述する線形方程式が得られることを示し，同じ群H_λに対する一般超幾何関数（HGF）を用いて，GSSの特殊解として，HGFを生い分とする行列の行列式の形で与えられるものを構成した．これはWoodhouseが2008年に東京における研究集会で示唆したことを実行したものである．（論文⑦）

（3）　その他

①　P^1 上の1位の極のみを持つFuchs型方程式のmonodromy保存変形から，Schlesinger系が得られる．一方Fuchs型方程式から新しいFuchs型方程式を構成する操作としてmiddle convolutionというものが知られている．この操作が，monodromy保存族を再び保存族に移すことを示した．（論文⑧）

指標多様体上の写像類群作用の力学系とパンルヴェ方程式の力学系をリーマン・ヒルベルト対応を介して結びつけ，それらの大域挙動を研究した。特に前者の有限軌道と後者の代数関数解の等価性を示し，さらにそれらの分類問題にかなりの進展を得た．（論文⑨）

②　準Painleve 性をもつ方程式のクラスでPainleveＩ 方程式を含むものを見出し，その解析的性質を調べた．PainleveＩ のタイプの２変数 Garnier 系についてその特異集合のまわりでの漸近解をもとめた．（論文⑩）

一般超幾何関数については当初設定していた問題のうち②が，一般Schlesinger系については④，⑤が未解決のままである．その他の問題についてもさらに研究を深める必要がある．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10　件）

①　H. Kimura, On Wronskian determinant formulas of the general hypergeometric functions, Tokyo J. Math. 査読有, Vol.34,2011 (in press)

②　H. Kimura, On a problem of arrangements related to the hypergeometric integrals of confluent type, Advanced Studies in Pure Mathematics,"Proceedings of MSJ-SI 2009, 査読有, 2011 (in press)

③　T. Kobayashi, M. Misawa and S. Okamura, Decay Property for the linear wave equations in two dimensional exterior domains, Differential and Integral Equations, 査読有, 2011 (in press)

④　岩崎克則, 特殊関数の諸問題 --パンルヴェ性をめぐって--, 複素幾何学の諸問題, 数理研講究録　査読無 1731 (2011), 1--13

⑤　K. Iwasaki, On the Markoff-Painleve transcendent, 複素力学系とその関連分野の総合的研究, 数理講究録, 査読無, 1699 (2010), 160-167,

⑥　H. Kimura, Y. Nakamura, Analogue of Ward correspondence for a degenerated Schlesinger system, Kumamoto J. Math. , 査読有, Vol.22,2009, 35-41

⑦　H. Kimura, General Schlesinger systems and their hypergeometric solutions, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.1662,2009,218-230

⑧　Y. Haraoka and G. Filipuk , Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, J. London Math. Soc., 査読有, Vol. 76,2007, 438-450

⑨　K. Iwasaki and T. Uehara, An ergodic study of Painleve VI, Mathematische Annalen, 査読有, Vol.338,2007, 295-345

⑩　Shun Shimomura, A class of differential equations of PI-type with the quasi-Painleve property, 査読有, Vol.186,2007, 267-280

〔学会発表〕（計　7 件）

①　岩崎克則，パンルヴェ性をめぐって，アクセサリー・パラメーター研究会，熊本大学理学部，2011 年 3 月 17 日．

②　岩崎克則，複素曲面上の正則力学系について，複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺，龍谷大学セミナーハウス，京都，2010 年 11 月 28 日．

③　K. Iwasaki, Dynamics of the sixth Painleve equation , 4th Workshop on Hamiltonian systems and related topics, Niigata University Satellite Campus, 2010 年 10 月 15 日．

④　岩崎克則，特殊関数の諸問題，複素幾何学の諸問題，京都大学数理解析研究所，

2010 年 9 月 6 日.

⑤ 岩崎克則, パンルヴェ方程式の代数解析と力学系, 北大談話会, 北海道大学理学部, 2010 年 5 月 20 日.

⑥ 木村弘信, On a problem of arrangements related to the hypergeometric integrals of confluent type, The 2nd MSJ-MI「Arrangements of Hyperplanes」, 2009 年 8 月 11 日, 北海道大学

⑦ 木村弘信, モノドロミー保存変形と Twistor 理論, 微分方程式の総合的研究, 2007 年 12 月 15 日, 東京大学

〔図書〕(計 1 件)

木村　弘信, サイエンス社, 超幾何関数入門, 2007, 185

6．研究組織

(1)研究代表者

木村　弘信 (KIMURA HIRONOBU)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40161575

(2)研究分担者

原岡　喜重 (HARAOKA YOSHISHIGE)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：30208665
(H19)

田邊　晋 (TANABE SUSUMU)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
(2010 年 9 月 30 日退職)
研究者番号：90432997
(H19)

三沢　正史(MISAWA　MASASHI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40242672
(H19)

古島　幹雄(FURUSHIMA MIKIO)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：00165482
(H19)

岡本　和夫(OKAMOTO　KAZUO)
大学評価・学位授与機構・国際連携センター・理事
研究者番号：40011720
(H19)

岩崎　克則 (IWASAKI KATSUNORI)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00176538
(H19)

下村　俊 (SHIMOMURA SHUN)
慶応大学・理工学部・教授
研究者番号：00154328
(H19)

川向 洋之 (KAWAMUKO HIROYUKI)
三重大学・教育学部・准教授
研究者番号：00303719
(H19)