様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５０００１７
研究課題名（和文）グラフの 2-因子とその成分数

研究課題名（英文）A 2-Factor in a Graph and the Number of Its Components

研究代表者
斎藤 明（SAITO AKIRA）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：90186924

研究成果の概要（和文）：
本研究はグラフのハミルトンサイクルを成分数=1 の 2-因子と捉え、成分数の観点からハミルトンサイクルと 2-因子の差異を検討することを目的とした。Dirac 条件、Chvatal-Erdos 条件、禁止部分グラフ条件の３つの条件を取り上げ調べたところ、Dirac 条件と Chvatal-Erdos 条件は 2-因子の成分数を識別する能力を持たないこと、禁止部分グラフはハミルトンサイクルと 2-因子の差異を明瞭に区別することが判明した。

研究成果の概要（英文）：
In this research, we interpreted a hamiltonian cycle as a 2-factor with one component, and investigated conditions which differentiate the existence of a hamiltonian cycle and that of a 2-factor, or more generally, which give information on the number of components in a 2-factor. We chose Dirac’s condition, the Chvatal-Erdos condition and conditions based on forbidden subgraphs. We discovered that while neither Dirac’s condition nor the Chvatal-Erdos condition gives any information on the number of components in a 2-factor, there is a notable difference between forbidden subgraphs forcing the existence of a hamiltonian cycle and those forcing the existence of a 2-factor.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,400,000	420,000	1,820,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：グラフ理論
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：グラフ、ハミルトンサイクル、因子、成分、禁止部分グラフ、最小次数

１．研究開始当初の背景

グラフの全ての頂点を通るサイクルをハミルトンサイクルとよぶ。また全ての頂点の次数が一定値 r であるような全域部分グラフを r-因子とよぶ。

ハミルトンサイクルも r-因子もグラフ理論においては古くから研究されている。全てのグラフがハミルトンサイクルや r-因子を持つわけではない。従って、与えられたグラフがハミルトンサイクルや r-因子を持つための条件を求めることが、主たる研究テーマとなる。r-因子に関しては、Tutte の定理とよばれるグラフが r-因子を持つための必要十分条件が知られている。一方、グラフがハミルトンサイクルを持つための非自明な必要十分条件は知られておらず、研究の中心は主に良い十分条件の発見にある。

2-因子はハミルトンサイクルと良く似ているが、等価な概念ではない。全てのハミルトンサイクルは 2-因子だが、グラフの 2-因子は２つ以上のサイクルから成るかもしれず、必ずしもハミルトンサイクルであるとは限らない。すなわちハミルトンサイクルは「連結な 2-因子」あるいは「成分数=1 の 2-因子」というべきものである。

上記のようにハミルトンサイクルを「成分数=1 の 2-因子」と言い換えると、その自然な拡張が見えてくる。すなわち、ある正整数 k を与えて、「成分数=k の 2-因子」を考えることができる。こうした考えは Brandt らによる以下の論文で初めて示された。

・S.Brandt, G.Chen, R.J.Faudree, R.J.Gould and L.Lesniak, Degree condition for 2-factors, Journal of Graph Theory, Vol.24 (1997) 165-173.

この論文ではハミルトンサイクル存在の有名な十分条件である Ore 条件が取り上げられている。Ore 条件を満たすグラフはハミルトンサイクル、すなわち成分数=1 の 2-因子を持つ。しかし彼らは、Ore 条件を満たすグラフは 1 から位数の 1/4 までの間にある全ての整数 k について、成分数=k の 2-因子を持つことを示した。Ore の条件を満たすグラフは様々な成分数から成る 2-因子を持つのである。Ore の条件をわずかでも緩和すると 2-因子の存在すら保証されないことも知られている。すなわち Ore の条件に関しては「条件を満たせば様々な 2-因子の存在が保証され、少しでも条件を緩和すると 2-因子の存在自体が保証されない」という現象が観察される。従来の Ore の定理（Ore 条件を満たすグラフはハミルトンサイクルを持つ）はこの現象の一部を眺めているに過ぎず、成分数という観点から捉えたとき、その値が 1 であることは他の値と比べて際だって特異であるとは言えないことが分かる。

Brandt らによる上記論文の発表後、多くの研究者が 2-因子の成分数に関する研究を始めた。そのほとんどはハミルトンサイクル存在の十分条件を取り上げ、それを満たすグラフがどのような成分数の 2-因子を持つかを調べている。こうした研究はその背景に Brandt らの研究の精神があり、条件を満たすグラフには様々な成分数を持つ 2-因子が存在することを示そうとする。これを逆に捉えれば「従来のハミルトンサイクル存在の十分条件は 2-因子の成分数を識別する能力を持っていない」と主張しようとしていることになる。

ハミルトンサイクルと r-因子は計算量の観点からも研究されている。有限単純グラフ全体を定義域としたとき、入力されたグラフにハミルトンサイクルが存在するか否かを判定する問題は NP-完全であることが知られている。一方 2-因子については、それが存在するか否かを判定する多項式時間アルゴリズムが知られている。２つの存在判定問題が属する計算量のクラスは（P≠NP の仮定の下で）異なっているのである。位数 n のグラフが 2-因子を持てば、その成分数は n/3 以下であることがすぐに分かる。成分数の言葉で述べると「成分数 1 以上 n/3 以下の 2-因子が存在するか」と問う問題はクラス P に属し、「成分数=1 の 2-因子が存在するか」と問う問題は NP-完全となる。

２．研究の目的

上記の背景を踏まえ、本研究は 2-因子の成分数を識別する条件を調べることを目的とした。位数 n のグラフ G と a≦b なる正整数 a, b に対し、「G に成分数が a 以上 b 以下の 2-因子が存在する」という命題を P(a, b; G) とおく。すると全ての有限単純グラフに P(1, 1; G) の真偽を問う問題は NP-完全であり、P(1, n/3; G) を問う問題はクラス P に属する。従って k を 1 から n/3 まで動かすと、P(1, k; G) の計算量のクラスが変化する。もしこの変化の様子を捉えることができれば、P=NP 問題（P≠NP 問題）への重要な知見が得られるかもしれない。

Brandt らの研究を端緒とする一連の研究は 2-因子の成分数を調べる興味深いものだが、P(1, k; G) の変化を捉えるという本研究の目的とは整合しない。例えば Brandt らが調べた Ore 条件について考えると、それを満たしていれば P(1, 1, ; G) が保証され、少しでも緩和すると P(1, n/3; G) の保証すら壊れてしまう。命題 P(1. k; G) には P(1, 1,G)→ P(1, 2; G) → … →P(1, n/3; G) という自然な強弱関係があるが、Ore 条件では「P(1, k; G) は保証されないが P(1, k+1; G) は保証される」という途中の状態を観察できないのである。Brandt ら以降の研究も「P(1, 1; G) を特別視しない」という精神の下で行われており、P(1, k; G) の差異を見出そうとする本研究の考えとは対極に位置する。

本研究は成分数=k（あるいは成分数≦k）の 2-因子の存在を保証する十分条件で、k に依存するものを探し出すことを目指した。ハミルトンサイクル存在に関しては、Ore 条件以外にも、次数に基づく多くの条件が知られており、それらは「次数条件」と総称されている。本研究ではまずこれら次数条件の中に所望のものがあるかどうかを調べることを目標とした。また次数条件に属さないハミルトンサイクル存在の十分条件として Chvatal-Erdos 条件がある。この条件は独立数と連結度で記述されているが、この条件を 2-因子の成分数に関する条件に拡張し、成分数に依存する形になるかどうかを調べようとした。

３．研究の方法

ハミルトンサイクルの前構造に支配サイクルとよばれるものがある。グラフ G の頂点集合 S について、G の全ての辺のいずれか、もしくは両方の端点が S に含まれるとき、S は G を辺支配する、もしくは単に支配するという。G の支配サイクルとはその頂点集合が G を支配するようなサイクルである。

グラフの全頂点の集合はそのグラフを支配している。その意味でハミルトンサイクルは支配サイクルである。しかし支配サイクルはハミルトンサイクルよりも広い概念である。実際ハミルトンサイクルの存在を保証する多くの十分条件について、それを緩和するとハミルトンサイクルの存在は保証されなくなるが、支配サイクルの存在は依然として保証されるという現象が見られる。

支配サイクルがハミルトンサイクルの前構造であるならば、成分数=k の 2-因子の前構造としてグラフを支配する k 個の点素なサイクルの集合があると考えられる。そこで次数条件、特に Dirac の条件について、条件を緩和した状況でそのような点素なサイクルの存在が保証されるかどうかを調べた。もし得られる条件が成分数=k に依存すれば、前構造の段階では成分数による変化の様子が観測できる。また 2-因子の場合と同じく成分数に依存しなければ、前構造においても両者の識別は難しく、クラス P と NP の差異を捉えることの難しさを示す傍証を得る。

上記に続けて、Chvatal-Erdos 条件についても考察を加えた。Chvatal-Erdos 条件は次数条件ではなく、扱いが難しい。実際本研究実施前には、ハミルトンサイクルに関する Chvatal-Erdos 条件を 3 個以上の成分数を持つ 2-因子に拡張することすらできていなかった。そこでまず互いに点素なサイクルが存在する状況で Chvatal-Erdos 条件を論じられる手法を確立し、それを用いて成分数との関係を論じることを試みた。手法を確立しておけば、たとえ得られる条件が成分数に依存するものでなくとも、将来の研究や Brandt らが始めた研究に大きな寄与を与える。

ここまでは研究開始当初から代表者が抱いていた構想だが、研究を進めるにつれ、禁止部分グラフによる条件も 2-因子の成分数を調べる重要な道具となることが分かってきた。$K_{1,m}$ と言う形のグラフをスター、$K_{1,3}$ をクローとよぶ。グラフ H について、H を同形なグラフを誘導部分グラフとして含まないグラフを H-フリーグラフとよぶ。最小次数 4 以上のクローフリーグラフは 2-因子を持つが、最小次数 4 以上のクローフリーグラフでハミルトンサイクルを持たないものは無数に存在する。一方 7-連結のクローフリーグラフはハミルトンサイクルを持つ。このようにクローフリーグラフでは、2-因子の存在とハミルトンサイクルの存在を識別する条件が知られている。また近年禁止部分グラフの言葉で記述されるハミルトンサイクル存在の十分条件が数多く発見されている。これらの中から成分数に依存する 2-因子の条件を見出すことは、かなり有望な方法と考えられた。

４．研究成果

k 個の点素なサイクルから成る支配集合については、以下の定理が得られた。

定理１
任意の正整数 k についてある整数 N が存在して、任意の n≧N について最小次数(n-2)/3 以上の 2-連結グラフは k 個の点素なサイクルから成る支配集合を持つ。

Brandt らの結果の系として、位数 n が十分大きいとき、最小次数 n/2 以上のグラフは k 個の成分数からなる 2-因子を持つことが示されるが、定理 1 は最小次数 (n-2)/3 以上の段階で既に支配集合となる k 個の点素なサイクルが生じることを主張している。ハミルトンサイクルの前構造として支配サイクルが現れるのと同様に、2-因子にも前構造が現れることが、この定理により示された。

定理 1 に現れる最小次数の下界 (n-2)/3 は k の値によらず常に最良である。最小次数の条件が 2-因子の成分数を識別できないのと同様に、前構造においてもその成分数を識別することはできない。この定理はクラス P と NP の差異を見出すことの難しさを示す１つの傍証と解釈することができる。

Chvatal-Erdos 条件に関しては、以下の定理が得られた。

定理２
連結度 $\kappa \geqq 2$, 独立数 a なるグラフ G が

Chvatal-Erdos 条件 $a \leqq \kappa$ を満たしているとする。もし正整数 k について G の位数が $k \cdot r(a+4, a+1)$ 以上あれば、G は成分数=k の 2-因子を持つ。ただし $r(x, y)$ は Ramsey 数である。

この定理により、与えられた正整数 k について、位数が十分大きいグラフが Chvatal-Erdos 条件を満足すれば、ハミルトンサイクルだけでなく、成分数=k の 2-因子を持つことが分かる。本定理は次数条件ではない Chvatal-Erdos 条件について、成分数を指定された 2-因子の存在を一般に保証する初めての結果であり、グラフ理論研究に大きな影響を与えた。また証明は因子の存在に Ramsey 理論を用いている。Ramsey 理論から導かれるグラフの局所構造を大域的なサイクルの構造に関係づける手法は本証明で初めて編み出されたものであり、方法論としても画期的なものとなった。

その一方で、本定理は Chvatal-Erdos 条件もまたサイクルの成分数を識別できないことを示唆しており、クラス P と NP の差異を見出すことの困難さも示している。

研究開始後に着想を得た禁止部分グラフは、結果的にも最も成功した。研究代表者は以下の定理を得た。

定理３

(1) 2 個の連結グラフを禁止することにより 2-因子の存在を強制しようとすると、禁止するグラフの一方は必ずクロー、もしくはその誘導部分グラフになる。

(2) 3 個の連結グラフを禁止することにより 2-因子の存在を強制しようとすると、禁止するグラフのどれか１つはスター、もしくはその誘導部分グラフになる。

(3) 3 以上の任意の整数 m に対し、$K_{1,m}$ を含む３個の連結グラフの集合で、それらを禁止することにより 2-因子の存在を強制するものがある。

(4) スターを含まない 4 個の連結グラフの集合で、それらを禁止することにより 2-因子の存在を強制するものがある。

ハミルトンサイクルの存在を禁止部分グラフで強制しようとすると、何個のグラフを使おうとも（無限集合であろうとも）その中にクローを含めなければならないことが知られている。従って、禁止部分グラフではハミルトンサイクルと 2-因子の差異が明瞭に現れている。すなわち

①２個の禁止部分グラフはハミルトンサイクルと 2-因子の存在の差異を識別できない。

②３個の禁止部分グラフはハミルトンサイクルと 2-因子の存在を識別できる。しかし依然としてスターは必要となる。ただしスターの大きさに関する制限からは開放される。

③４個のグラフを禁止すると、2-因子存在の強制に関して、スターの必要性という制限からも開放される。

上記のようにこの定理は、禁止部分グラフの個数を増やしていくことにより、それらに課せられる条件が順次開放されていく様子を明瞭に表している。

以上が本研究の目的に直接関わる研究成果であり、それぞれの目的について十分な形の解が得られた。

研究を進める上で、当初予想していなかった知見も多数得られた。ここではその中で重要なものを２つ挙げる。

まず第一に、支配集合に関して重要な知見が得られた。支配サイクルの研究を進めるにあたり、一般の支配集合に関する文献調査を行った。このとき木の支配数に関する１つの論文の中に誤りを見つけ、その修正を試みた。その結果修正に成功したのみならず、以下のような結果を得た。グラフ G とその頂点の部分集合 S について、S に含まれない全ての頂点が S 内に k 個の近傍を持つとき、S を k-支配集合という。また S の中の頂点を結ぶ辺が存在しないとき、S を独立集合とよぶ。G の最小の k-支配集合の位数を k-支配数と呼び $\gamma_k(G)$ と表す。また G の最小の独立集合の位数を独立数とよび、$\alpha(G)$ と表す。

定理４

任意の２部グラフ G について

$$\gamma_2(G) \leqq (3/2)\,\alpha(G)$$

が成り立つ。

元の論文は誤った証明の下で木について同じ不等式を主張していた。しかし上記定理は、不等式で本質的な仮定は木であることではなく、２部グラフであることを示している。定理４の不等式は最良であり、これ以上改善することはできない。また本研究代表者は等号が成立する２部グラフを特徴付けることにも成功した。一般のグラフでは独立数と 2-支配数の間に何の関係もないことが知られており、２部グラフに限定すると現れるこの不等式は、支配集合の研究に大きな影響を与えた。

第２の成果は線グラフに関するものである。グラフ G の各辺を頂点に対応させ、G における辺が端点を共有するとき、対応する頂点を辺で結ぶ。この操作によりできるグラフを G の線グラフとよぶ。またあるグラフの線グラフと同形になっているグラフを単に線

グラフとよぶ。
任意の線グラフはクローフリーグラフである。線グラフではないクローフリーグラフも存在するが、線グラフのクラスで成り立つ多くのサイクルに関する性質がクローフリーグラフに拡張できることが知られている。従ってハミルトンサイクルや 2-因子の研究では線グラフ、あるいは線グラフの操作を複数回行って得られる高階線グラフの性質が重要な対象となる。
本研究代表者は禁止部分グラフと 2-因子の成分数を調べる過程で高階線グラフの 2-因子を研究し、n 回線グラフの操作を取った高階線グラフが成分数≦k の 2-因子を持つための必要十分条件を得ることに成功した。この結果により、線グラフにおける 2-因子の成分数の個数の詳細な情報を得ることに成功した。またこの結果をクローフリーグラフに拡張することにより、クローフリーグラフの 2-因子の成分数に関しても多くの知見を得た。
以上のように本研究はグラフ理論、特にハミルトンサイクルと 2-因子の成分数に関する研究に大きなインパクトを与える成果を数多く与えることができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

① L.Xiong and A.Saito, Closure, stability and iterated line graphs with a 2-factor, Discrete Mathematics, 査読有, Vol.309, 2009, 5000-5010.

② R.E.L.Aldred, J.Fujisawa and A.Saito, Two forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor in graphs, Australasian Journal of Combinatorics, 査読有, Vol.44, 2009, 235-246.

③ A.Saito, Chvatal-Erdos Theorem ---old theorem with new aspects---, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, Vol.4535, 2008, 191-200.

④ J.Fujisawa, A.Hansberg, T.Kubo, A.Saito, M.Sugita and L.Volkmann, independence and 2-domination in bipartite graphs, Australasian Journal of Combinatorics, 査読有, Vol.40, 2008, 265-268.

⑤ G.Chen, R.J.Gould, K.Kawarabayashi, K.Ota, A.Saito and I.Schiermeyer, The Chvatal-Erdos condition and 2-factors with a specified number of components, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 査読有, Vol.27, 2007, 401-407.

⑥ S.Fujita, A.Saito and T.Yamashita, Edge-dominating cycles in graphs, Discrete Mathematics, 査読有, Vol.307, 2007, 2934-3942.

⑦ S.Bau and A.Saito, Reduction for 3-connected graphs of minimum degree at least four, Graphs and Combinatorics, 査読有, Vol.23(Supplement), 2007, 135-144.

⑧ Y.Hasegawa and A.Saito, Graphs with small boundary, Discrete Mathematics, 査読有, Vol.307, 2007, 1801-1807.

⑨ R.J.Faudree, A.Saito, R.H.Schelp and I.Schiermeyer, Degree conditions for hamiltonicity: counting the number of missing edges, Discrete Mathematics, 査読有, Vol.307, 2007, 873-877.

〔学会発表〕（計 8 件）

① 斎藤 明, Cycles of length modulo k（招待講演）, Paths, Cycles and Graph Structures Workshop, 2009 年 7 月 12 日, University of Colorado, Denver, Colorado, U.S.A.

② 斎藤 明, Forbidden subgraphs and 2-factors（招待講演）, SIAM Annual Meeting, 2009 年 7 月 10 日, Colorado Convention Center, Colorado, Denver, U.S.A.

③ 斎藤 明, Bipartite Graphs（招待講演）, The second International Conference on Mathematics and Natural Sciences, 2008 年 10 月 28 日, Bandung Institute of Technology, Bandung, Indonesia.

④ 斎藤 明, Forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor, 日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 24 日, 東京工業大学

⑤ 斎藤 明, Forbidden subgraphs and matchings in graphs (招待講演), 21st. Cumberland Conference on Graph Theory Combinatorics and Computing, 2008年5月 15日, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, U.S.A.

⑥ 斎藤 明, Forbidden subgraphs and matchings in edge-deleted graphs, 日本数学会年会, 2008年3月23日, 近畿大学

⑦ 斎藤 明, Closure and small cutsets, 日本数学会秋季総合分科会, 2007年9月21日, 東北大学

⑧ 斎藤 明, Chvatal-Erdos Theorem (招待講演), Kyoto International Conference on Computational Geometry and Graph Theory, 2007年5月15日, 京都大学

6．研究組織

(1)研究代表者
斎藤 明 (SAITO AKIRA)
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：90186924

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし