

平成 21 年 6 月 22 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007 ～ 2008

課題番号：19500186

研究課題名 (和文) 低階数擬似不偏推定法と悪条件逆問題への応用に関する研究

研究課題名 (英文) A study on pseudo-unbiased reduced-rank estimators and their applications to ill-conditioned inverse problems

研究代表者

山田 功 (YAMADA ISAO)

東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：50230446

研究成果の概要：

本研究では、悪条件の線形逆問題の新しい解法を目標とし、「低階数行列の中で最適な推定行列とは何か」を検討している。まず、本研究の準備として「最小分散不偏推定行列 (BLUE: Best Linear Unbiased Estimator / Gauss-Markov estimator)」の考え方に倣い、「(一様)不偏推定行列」を最良近似する低階数行列「擬似不偏推定行列」を定義するとともに、全ての「擬似不偏推定行列」の中で「最小の分散値」を達成する「最小分散低階数擬似不偏推定行列」の一形式を導くことに成功している (ICASSP2006)。次に Trace Optimization の分野で知られた定理を援用することにより、論文 (ICASSP2006) の議論を再構築し、「最小分散低階数擬似不偏推定行列 (MV-PURE: Minimum Variance Pseudo-Unbiased Reduced-Rank Estimator)」の見通し良い表現を導くことに成功している。また、「最小分散低階数擬似不偏推定行列」を線形制約条件の下で導くことにも成功している。さらに、「最小分散低階数擬似不偏推定行列」の考え方を確率ベクトルの推定に応用するアイデア (Stochastic MV-PURE: 確率的最小分散低階数擬似不偏推定) と最適な階数設定法を提案し、実際にこれを MIMO 通信システムの最適受信機に応用し、その有効性を確認している。その他にもこの問題の検討過程で明らかとなった多数の関連研究課題の解決に成功している。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2008 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学 感性情報学・ソフトコンピューティング

キーワード：確率的情報処理

## 1. 研究開始当初の背景

雑音の影響を受けて観測されたデータから、その観測結果をもたらした要因を推定する問題を逆問題という。線形逆問題は、特に観測系が線形モデル (モデル行列と未知パラメータの積にランダムな雑音加わった形) で表現されるとき、観測結果 (観測ベクトル) から要因 (未知パラメータ) を線形推定する

問題である。線形推定値は観測ベクトルに線形推定行列を乗じた結果として定義されるため、未知パラメータへの 2 乗平均誤差  $J$  (誤差の 2 乗平均) を可能な限り小さくする線形推定行列の獲得が主目標となる。ところが、2 乗平均誤差  $J$  には未知パラメータ自身が含まれてしまうため、原理上  $J$  を直接最小化することはできない。ガウス・マルコフの最小

分散不偏推定法は、バイアスゼロを達成する線形推定行列全体の中で、線形推定値の分散の最小化を達成する線形推定行列による推定法であり、情報通信、信号画像処理問題をはじめ数理統計科学で広く利用されている。ところが、最小分散不偏推定法の線形推定値はモデル行列の最小の特異値のマイナス2乗の影響が強く現れるため、モデル行列が小さな特異値を持つとき、劣悪な推定結果を与えてしまう。モデル行列が小さな特異値を持つ線形逆問題は「悪条件の線形逆問題 (ill-conditioned linear inverse problem)」と呼ばれており、最小分散不偏推定法に代わる数多くの推定法が開発されてきた。それらは推定解の存在範囲を常識的な範囲に限定する方針に基づいており、代表的なものとして以下の2つが知られている。第1の方法は J. D. Riley (55), D. L. Philips (62), A. N. Tikhonov ('63)らによって提案された正則化法であり、最小2乗法のコスト関数にペナルティを付加し、これを最小化する方針に基づいている。しかしながら、推定結果はペナルティの設定に強く依存し、また「最適なペナルティの決定」は原理的に不可能であることが知られており、ヒューリスティックな方針から逃れられない。一方、Marquardt ('70)は、小さな特異値の影響を直接除去するために「モデル行列を最良近似する低階数行列の一般化逆行列 (Moore-Penrose 型)」を用いる推定法を提案している。観測雑音が白色雑音であるとき、Marquardt の推定法は最小分散不偏推定法を凌ぐ推定精度を達成することが知られており、「推定解の存在範囲を低次元部分空間に限定する方針」の有効性が示されている。ところが、「推定解の存在範囲を低次元部分空間に限定する方針」を採用した場合、原理的に不偏推定は実現不可能であるため、可能な限り推定結果の分散とバイアスを抑圧する推定法の実現は未解決であった。

## 2. 研究の目的

Marquardt の低次元近似推定法のアイデアは、信号処理の分野で Scharf ('95)によって、また、数理統計学の分野で Chipman ('99)によって形式的に一般化されている (注: Scharf は Marquardt の結果を参照していないので独立と考えられる)。ところが最小分散不偏推定法との関係は何も解明されていない。本研究では、「悪条件の線形逆問題」に対してロバストな推定法を確立するために、「推定解の存在範囲を低次元部分空間に限定する方針」を堅持する。また、可能な限り推定値のバイアスを抑圧した新推定法「低階数擬似不偏推定法」を提案する。「低階数擬似不偏推定法」は「不偏推定法」の一般化となっている。次に、「低階数擬似不偏推定法」の条件を満足する全ての推定行列の中から

推定結果の分散の最小化を達成する「低階数最小分散擬似不偏推定法 (Minimum Variance Pseudo Unbiased Low Rank Estimator)」の構成問題を考える。「低階数最小分散擬似不偏推定法」は、「最小分散不偏推定法」の自然な一般化であり、低次元推定法の中では理想的な推定法となる。また、新しい低階数推定法の中で Marquardt の推定法や Chipman の推定法の位置付けを明らかにする。これらの課題は「低次元近似推定法の考え方」を正しく理解し、その発展を目論む研究者にとっては極めて自然な問題設定であるが、階層構造を持つ非凸制約付き最適化問題となるため、ほとんど未踏である。本研究は「低階数擬似不偏推定法」と「低階数最小分散擬似不偏推定法」を確立することによって、世界ではじめて理想的な低階数推定法の実現を目指す研究となる。

## 3. 研究の方法

初期検討 (IEEE ICASSP2006, Toulouse, May 2006 で発表済)によると2つの固有値問題を順番に解決することによって特別な最小分散擬似不偏低階数推定行列が実現できるはずである。これは「全ての低階数擬似不偏推定行列のパラメータ表現を利用して最小分散値を達成するパラメータを特定する方針」に基づいている。本研究も同様の方針に従うが、最も自然な「擬似不偏低階数推定行列の定義」を与えると共に「全ての最小分散擬似不偏低階数推定行列」を求めることが中心的な課題となる。擬似不偏行列を行列の Frobenius ノルムの尺度で定義する場合には、低階数近似行列に関する Schmidt の定理を用いてパラメータ表現を導くことができる。一方、擬似不偏行列を無限個ある他の行列ノルムの尺度で定義する場合には、「低階数擬似不偏推定行列全体の集合」は行列ノルムに依存してしまい、どの行列ノルムを選択するかによって擬似不偏行列と低階数最小分散擬似不偏推定行列の定義は異なってしまう。この難点を解決するために、本研究では「ユニタリ不変ノルム族」に属する全ての行列ノルムを同時に最小化する同時最良近似問題を検討している。この同時最適条件を満たすものを「(理想的な)擬似不偏推定行列」として定義することにした。さらに、「全ての低階数擬似不偏低階数推定行列の中で推定値の最小分散値を達成するものを低階数最小分散擬似不偏推定行列」の定義とした。

## 4. 研究の成果

(a) 「ユニタリ不変ノルム族」に属する全ての行列ノルムを同時に最小化する「(理想的な)擬似不偏推定行列全体」が実は「フロベニウスノルムの尺度で定義した擬似不偏推定行列全体」に一致することを示すことに成

功した。これにより、本質的に初期検討結果で得ていた擬似不偏行列全体のパラメータ表現がそのまま利用できることがわかった。さらに J. von Neumann や Theobald らのトレース最適化理論の諸定理を駆使することにより、パラメータ表現を簡易化できることがわかった。

(b) (a) で得られたパラメータ表現に、Rao や Mitra の行列方程式の可解性に関する古典的な定理を用いることにより、最小分散擬似不偏低階数推定行列の一般表現を導くことに成功した。

(c) 雑音モデルが白色雑音である場合、提案する最小分散擬似不偏低階数推定行列は Marquardt の推定行列に一致することがわかった。更に、雑音モデルが有色雑音である場合には、最小分散擬似不偏低階数推定行列は Chipman の低階数推定行列に一致することも示された。さらに、最小分散擬似不偏低階数推定行列に線形制約を課した線形制約付き最小分散擬似不偏低階数推定行列を導き、階数制限を課さないとき、Chipman の線形制約付き最小分散不偏推定行列に一致することを明らかにした。これにより、**最小分散擬似不偏低階数推定行列 (MV-PURE) が多くの最適推定行列をその特別な場合として含む極めて自然な推定法となっていることが明らかになった。**

(d) 最小分散擬似不偏低階数推定行列 (MV-PURE) を悪条件の線形逆問題 (画像復元問題) に応用例を示し、極めて優れた推定結果が得られることを明らかにした。

(e) 未知パラメータが確率変数ベクトルであり、観測ベクトルとの相関行列が既知であれば未知パラメータと推定値の 2 乗平均誤差を線形推定行列の 2 次関数として表現可能であり、その最小値は周知の Wiener フィルタによって達成される。ところが、Wiener フィルタは、モデル行列の誤差の影響に脆弱となり、無歪み制約条件を課した 2 乗平均誤差最小化によってモデル行列の誤差にロバストな推定が得られることが経験的に知られている。本研究では、最小分散擬似不偏低階数推定法の考え方を応用し、低階数条件を課した上で可能な限り無歪み制約条件を満たすとともに、更に 2 乗平均誤差の最小値を達成する低階数行列を与え、極めてロバストな推定 (Stochastic MV-PURE) を実現することに成功している。実際に、Stochastic MV-PURE を MIMO 無線通信の最適受信問題に応用し、極めて優れた受信機が実現されることを明らかにした。

(f) その他、MV-PURE, Stochastic MV-PURE を応用した多くの関連研究の成果が得られている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件) (全て査読有)

① Renato. Cavalcante, Isao Yamada  
A Flexible Peak-to-Average Power Ratio Reduction Scheme for OFDM Systems by the Adaptive Projected Subgradient Method, IEEE Trans. Signal Process., vol. 57, pp. 1456-1468, 2009.

② Tomasz Piotrowski, Renato Cavalcante, Isao Yamada, Stochastic MV-PURE Estimator-Robust Reduced-Rank Estimator for Stochastic Linear Model, IEEE Trans. Signal Process., vol. 57, pp. 1293-1303, 2009.

③ Masaki Misono, Isao Yamada An Efficient Adaptive Minor Subspace Extraction Using Exact Nested Orthogonal Complement Structure, IEICE Trans. Fundamentals, vol. E91-A, pp. 1293-1303, 2008.

④ Masao Yamagishi, Isao Yamada, A Deep Monotone Approximation Operator Based on the Best Quadratic Lower Bound of Convex Functions, IEICE Trans. Fundamentals, vol. E91-A, pp. 1858-1866, 2008.

⑤ Tomasz Piotrowski, Isao Yamada, MV-PURE Estimator: Minimum-Variance Pseudo-Unbiased Reduced-Rank Estimator for Linearly Constrained Ill-Conditioned Inverse Problems, IEEE Trans. Signal Process. vol. 56, pp. 3408-3423, 2008.

⑥ Konstantinos Slavakis, Sergios Theodoridis, Isao Yamada, Online Kernel-Based Classification Using Adaptive Projection Algorithms, IEEE Trans. Signal Process., vol. 56, pp. 2781-2796, 2008.

⑦ Renato. Cavalcante, Isao Yamada Multiaccess Interference Suppression in Orthogonal Space-Time Block Coded MIMO Systems by Adaptive Projected Subgradient Method, IEEE Trans. Signal Process, pp. 1028-1042, 2008.

⑧Renato. Cavalcante, Isao Yamada  
Steady-state Analysis of Constrained Normalized Adaptive Filters for MAI Reduction by Energy Conservation Arguments, Signal Processing, 86, 326-338, 2008.

⑨Konstantinos Slavakis, Isao Yamada,  
Robust wideband beamforming by the hybrid steepest descent method, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 55, pp. 4511-4522, 2007.

⑩Masahiro Yukawa, Konstantinos Slavakis, Isao Yamada, Adaptive parallel quadratic metric projection algorithms, IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, vol. 15, 1665-1680, 2007.

⑪山田 功 やさしい解説: 凸射影と適応フィルタリングの親密な関係- はらぺこJAWSから学ぶ理想的な信号処理 (招待論文), 日本音響学会誌, 63, pp. 600-605, 2007.

[学会発表] (計 21 件)

① Isao Yamada, Tomasz Piotrowski  
Minimum-Variance Pseudo-Unbiased Reduced Rank Estimator and Its Applications  
【Invited Lecture】, " Special Session on Nonsmooth Analysis in Inverse and Variational Problems" 115<sup>th</sup> Annual Meeting of the American Mathematical Society (AMS), 2009, 1. 5, Washington, DC.

② Isao Yamada, Tomasz Piotrowski, Masao Yamagishi, Reduced-rank extension of BLUE and deep lipschitzian gradient projector for inverse problems,  
IUCr2008(International Union of Crystallography), Invited Micro Symposium : Real space direct method, 2008. 8. 28, 大阪

③ Sergios Theodoridis, Konstantinos Slavakis, Isao Yamada, Adaptive Processing in a World of Projection  
【 Plenary Lecture 】 , 2008 IEEE International Workshop on Machine

Learning for Signal Processing (MLSP), 2008. 8. 17, Cancun.

④Renato Cavalcante, Isao Yamada,  
Peak-to-average power ratio reduction in OFDM systems by the Adaptive Projected Subgradient Method, Proc. IEEE ICASSP 2008, 2008, 4. 2, Las Vegas

⑤Noriyuki Takahashi, Isao Yamada,  
Steady-state performance of hyperslab projection algorithm Proc. IEEE ICASSP 2008, 2008, 4. 2, Las Vegas

⑥仁平章, 松下卓史, 高橋則行, 山田 功  
低階数最良近似行列を用いた非負行列因子逐次分解法に関する一考察, 電子情報通信学会技術研究報告(信号処理研究会), 2008年3月7日, 山口大学

⑦Isao Yamada , Signal Processing  
Applications of Fixed Point Theory of Quasi-nonexpansive Mapping (Invited Tutorial Lecture), 6th International Conference on Information, Communications and Signal Processing(ICICS' 07), 2007年12月10日, シンガポール

⑧山田 功, 不動点理論と最適化理論の融合による新しい信号処理[ワークショップ講演], 2007 情報理論とその応用シンポジウム, 2007年11月28日, 賢島

⑨Renato. Cavalcante, Isao Yamada, OFDM Peak-to-Average Power Ratio Reduction by Adaptive Projected Subgradient Method, IEICE SIP Symposium, 2007年11月7日~9日, 東北大学

⑩Tomasz Piotrowski, Renato. Cavalcante, Isao Yamada, An Application of MV-PURE Estimator to Robust Detection Problem in Multiaccess MIMO Wireless Systems, IEICE SIP Symposium, 2007年11月7日~9日, 東北大学

⑪Noriyuki Takahashi Isao Yamada, Steady-state analysis of adaptive filtering

based on projection onto hyperslab, IEICE SIP Symposium, 2007年11月7日～9日, 東北大学

⑫ Masaki Misono, Isao Yamada, Adaptive minor subspace extraction based on modified Oja-Xu MCA learning, IEICE SIP Symposium, 2007年11月7日～9日, 東北大学

⑬ Masao Yamagishi, Isao Yamada Efficient monotone approximation operator to convex level sets by one dimensional quadratic best lower bound, IEICE SIP Symposium, 2007年11月7日～9日, 東北大学

⑭ Noriyuki Takahashi, Daiki Manago, Isao Yamada, Hybrid Jacobi method and Hybrid Gauss-Seidel method for signal processing over distributed network, 2007 International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing (SMMSP 2007), 2007年9月1日～2日, Moscow(ロシア)

⑮ Tomasz Piotrowski, Isao Yamada Minimum-Variance Pseudo-Unbiased Reduced-Rank Estimator (MV-PURE) and its applications to ill-conditioned inverse problems, 2007 International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing (SMMSP 2007), 2007年9月1日～2日, Moscow(ロシア)

⑯ Konstantinos Slavakis, Sergios Theodoridis, Isao Yamada, Online sparse kernel based classification by projection, 2007 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing, 2007年8月27日～29日, Thessaroniki(ギリシャ)

⑰ Isao Yamada Optimization over possibly nonconvex fixed point set of certain mappings and its signal processing applications, Second Mathematical Programming Society International Conference on Continuous Optimization (ICCOPT II & MOPTA-07), 2007年8月13日～16日, Hamilton(カナダ)

⑱ Danilo Mandic, Isao Yamada, Machine Learning and Signal Processing Applications of Fixed Point Theory (TUTORIAL LECTURE), IEEE ICASSP 2007, 2007年4月15日～20日, Honolulu (アメリカ)

⑲ Konstantinos Slavakis, , Sergios Theodoridis Isao Yamada, Online kernel-based classification by projection, IEEE ICASSP 2007, 2007年4月15日～20日, Honolulu (アメリカ)

⑳ Renato. Cavalcante, Isao Yamada, Multiaccess interference reduction in OSTBC-MIMO systems by Adaptive Projected Subgradient Method, IEEE ICASSP 2007, 2007年4月15日～20日, Honolulu (アメリカ)

㉑ Masahiro Yukawa, Isao Yamada, Adaptive Parallel Variable-Metric Projection Algorithm - An Application to Acoustic Echo Cancellation, IEEE ICASSP 2007, 2007年4月15日～20日, Honolulu (アメリカ)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山田 功 (YAMADA ISAO)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号: 50230446

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし