

研究種目： 基盤研究（C）  
 研究期間： 2007～2009  
 課題番号： 19530798  
 研究課題名（和文） 数学的推論能力の育成を重視した幾何教育に関する研究  
 研究課題名（英文） A Study on Teaching of Geometry with an Emphasis on Fostering  
 Mathematical Reasoning Ability

研究代表者  
 國宗 進（KUNIMUNE SUSUMU）  
 静岡大学・教育学部・教授  
 研究者番号： 50214979

研究成果の概要（和文）：数学的推論能力の育成を重視した幾何教育を実現するために、文献分析や実験授業に基づいて、子どもの数学的推論能力に関する特徴を明らかにした。そして、イギリスでの幾何教育の実際も参考にして、数学の内容の理解と数学的推論能力の育成に関するねらいを明確にして授業を展開すること、実験・実測による方法と証明による方法の特徴について取り扱うこと、発見しそれを証明する過程を重視すること、等の具体的方策を示した。

研究成果の概要（英文）：We research the characteristics of students' ability about mathematical reasoning based on literature and lessons in primary and secondary schools. Furthermore, referred to teaching geometry in UK, we indicate it is important for the students to learn the significance of empirical way and deductive way, and to learn through the process to discover the property and then prove it.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数学教育学

科研費の分科・細目：4003

キーワード：算数教育，数学教育，幾何学，推論

#### 1. 研究開始当初の背景

幾何教育は、小学校算数科や中学校・高等学校数学科における指導の中で大きな比重を占めている。その一方で、学習指導要領の改訂のたびに指導内容やその扱いが大きく変更されるのは、幾何に関する内容である。

本研究は、重要でありながらその扱いが未だに安定しない幾何教育に焦点を当てる。

幾何教育の重視は、近年の世界的な傾向で

ある。例えば、イギリスでは、国家カリキュラムにおいて幾何学における推論が取り上げられ、アメリカ合衆国では、幾何に関する指導を代数の指導とともに重視することが連邦レベルでも叫ばれている。

欧米での数学教育に関する教育課程の議論は、数学の内容と共に、「問題解決、コミュニケーション、推論」等の能力形成が明示的に検討されるが、日本では数学の内容が中

心に語られがちである。このような現状の中で、本研究は、「能力形成」という点に、その中でも特に「数学的推論能力」の育成に焦点を当てて日本の幾何教育の一層の充実を目指すものであり、国内外の大規模調査の結果から改善の必要性が強く指摘されている「学習の過程」を、よりの確なものにすることに資するものである。なお、本研究でいう「数学的推論能力」とは、帰納的に、類比的に、演繹的に推論する能力の総体を指すものとする。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、小学校算数科、中学校・高等学校数学科における幾何教育について、児童・生徒の「数学的推論能力」の発達の様相と、その育成を重視した指導系統を明らかにするとともに、「数学的推論能力」の育成を重視した幾何教育を実現するための具体的方策に関して提言を行うことである。

## 3. 研究の方法

次の(1)～(3)を柱として考察を進める。

(1)小中高における数学的推論能力に関する発達の様相と教材の系統を明らかにする。

これは、先行研究・先行実践の分析・検討、教科書分析、実験授業の結果に基づく。

(2)イギリスの国家カリキュラムにおける数学的推論に関する内容と扱いを把握し、それに関する日英の異同を明らかにする。

これは、国家カリキュラムでの数学的推論の分析・検討、現地での授業観察・研究者へのインタビュー調査を通して行う。

(3) (1),(2)の結果を総合的に考察し、数学的推論能力育成のための具体的方策を示す。

## 4. 研究成果

### (1) 数学的推論能力に関する発達の様相

小中高における図形指導を検討する枠組みとして既に示している、小学校から高校ま

での12年間をⅠ期～Ⅲ期の4年ごと3期に分けてとらえる立場(國宗他, 2008)を踏襲して検討を進めた。

まず、図形学習における小学生の筋道立てで考える能力、及び中学生の数学的推論能力の育成に関して、算数・数学教科書の分析・検討を行った。そして、研究協力者の授業担当学年も考慮に入れて授業の計画を立て、以下の①～⑤の内容に関して実験授業を行って、そこでの子どもの数学的推論に関する実際を観察し分析した。①～⑤の中で、[ ]内には、重点的に観察しようとした内容を示してある。

①「かたちあそび」(小1), [子どもの形(外形)のとらえかた, 子どもが行う説明における根拠]

②「円と球」(小4), [球の特徴や性質に関する円からの類推, 既習事項に根拠を置いた説明]

③「三角形と四角形の角」(小5), [実験・実測による方法に対する子どもの意識, 中学校での扱いとの関連, 角の和が $180^\circ$ をどう説明するか]

④「三平方の定理の利用～四角錐の高さ」(中3), [錐の高さの把握, どの切断面で考えるか, 空間概念の理解の様相の把握]

⑤「チェバの定理」(高1), [チェバの定理を推測することの可能性, 生徒が行う証明, 三角形の五心に関する学習の様相]

### (2) イギリスの国家カリキュラムにおける数学的推論に関する内容と扱い

イギリスの国家カリキュラムに関しては、2006年に、初等教育にあたる主段階1, 2(KS1, KS2)における数学を計画し指導するための詳細な目標を示した『数学指導の枠組み』(DfEE, 1999)の修正版が示された。ここでは、次のことが「数学学習の7つの要素」

としてあげられている。

- ・数学を利用し応用すること
- ・数を数え理解すること
- ・数の実際を知り，利用すること
- ・計算すること
- ・形を理解すること
- ・測定すること
- ・データを処理すること

また，内容の示し方については，測定が従来の「形・空間・測定」から独立し，問題解決は「数学を利用し応用すること」の中に埋め込まれた。

さらに，中等教育にあたる主段階 3, 4 (KS3, KS4) について，2007 年に新たなカリキュラムがウェブ上に掲載された (QCA, 2007)。それは，「概念」，「過程」，「内容」の 3 つを骨子としていて，2008 年 9 月からはそれに基づく教育が行われている。以下に，3 つの骨子の下位項目 1.1~3.3 と，数学的推論に関する記述を中心に示しておく。

#### 1. 主な概念(Key concepts)

数学学習に付随する幾つかの主な概念がある。生徒は，彼らの知識や技能や理解を深め広げるために，それらの概念を理解する必要がある。

- 1.1 能力
- 1.2 創造性
- 1.3 数学の応用と関連
- 1.4 批判的理解

#### 2. 主要な過程(Key processes)

これらは，生徒が発達のために学ぶべき数学に必須のスキルであり過程である。

- 2.1 表現
- 2.2 解析

#### 数学的推論を使う

生徒は，以下のことができるようになるべきである。

- a 数学の中で関係づける。

- b 関連する問題の知識を使う。
- c 動的なイメージを視覚化し取り扱う。
- d パターンを特定し分類する。
- e 特別な場合や反例を考慮して，推測や一般化を正当化し始める。
- f 値を変化させた効果を探究し，不変量や共分散を調べる。
- g フィードバックを考慮に入れ，失敗から学ぶ。
- h 制限や仮説の影響を認め，結果や解を求めて論理的に取り組む。
- i 状況を分析するのに使われる多くの異なった技術があることを理解する。
- j 帰納的に考え，演繹する。

#### 適切な数学的手続きを使う

生徒は，以下のことができるようになるべきである。

- k 紙の上やスクリーン上に数学的な図表やグラフや作図を正確に行う。
- l 目的に応じて暗算か計算機器を選択して，正確に計算する。
- m 数や文字式や方程式を操作し，決まり切ったアルゴリズムを適用する。
- n ICT を使う際に，正しい統語法も含めて記号を正確に使う。
- o 方法や解や条件を記録する。
- p 見積もり近似し，やったことをチェックする。

#### 2.3 解釈と評価

生徒は，以下のことができるようになるべきである。

- a 見いだしたことに基づいて納得のいく議論をし，一般的な陳述を作る。
- b 作られた仮説や，結果や結論の適切性や正確性を考える。
- c 実験的証拠の強さに気づき，証拠と証明との違いを理解する。
- d データを調べてパターンや例外を見つける。

ける。

e 見いだしたことを基の状況と関係付け、それらが推測を支持するか破棄するかどうかを決定する。

f 問題の文脈や特別な状況において、他の誰かの数学的推論にかかわる。

g 選択すべきストラテジーの効果を考える。

## 2.4 コミュニケーションと振り返り

### 3. 範囲と内容(Range and content)

#### 3.1 数と代数

#### 3.2 幾何学と測定

#### 3.3 統計

イギリスの国家カリキュラムでは、上に示したように、学習の過程のあり方が前面に出るとともに数学的推論が強調されているが、訪問調査における授業観察及び研究協力者もまじえた議論によれば、実際の授業そのものが大きく変わったという感は得られなかった。なお、国家カリキュラムの実現に関連して 2000 年前後から特に強調されてきた、一斉授業の形での「導入・展開・まとめ」という区切りを設けた「3つの部分による授業」については、実践レベルでも着実に根付いてきていることが観察された。

### (3) 数学的推論能力育成のための具体的方策

本研究は、能力形成、特に「数学的推論能力」の育成に焦点を当てて幾何教育の一層の改善・充実を目指して行ってきた。数学的推論能力の育成に関する示唆として、次の3点を得ることができた。

#### ① 内容理解と数学的能力の育成に関して

数学の内容の理解と、その学習による数学的能力の育成との両者を授業のねらいに明確に位置付けて、授業展開を構想し実践することが重要である。

「円と球」の授業で観察したように、小4

の子ども達は、円の学習において得た性質や方法から類推して球についての学習を進めていった。さらにまた、「かたちあそび」の授業で考察したように、たとえ小1の子どもであっても、ある条件を付加して形をつくる活動が可能であり、前提を意識化して活動を進めることができる様子が明らかになった。それは筋道立てて考えることにつながる思考法である。

図形の学習段階の第Ⅰ期(小1～小4)においても、数学の内容の理解とともに、数学的推論能力、特に帰納的推論や類比的推論を多に奨励することによって、学習の過程が一層豊かになる。

#### ② 実験・実測による方法と証明による方法に関して

「三角形と四角形の角」の授業でみたように、実験・実測による方法によって図形の性質を得るとともに、その方法による調べ方の特徴について検討することは、小5の子ども達でも可能であることが明らかになった。図形の学習段階の第Ⅱ期(小5～中2)においては、実験・実測による方法や中2以降は証明による方法によって図形の性質を確かめる学習とともに、それらの方法の特徴に目を向けることは、実験・実測の有効性や証明を学習する意義を理解する上で重要である。ここでは、帰納的推論や演繹的推論が行われ、それらの能力が育成される。

その一方で、「三平方の定理の利用」として行った四角錐の体積の授業では、中3であっても、物差しで測って得た数値と仮定として与えられた数値とを使って関係式を作った生徒が観察された。実験・実測による方法の有効性とその限界を的確に理解することの難しさが現れている。

なお、「三角形の内角の和」の性質については、小5と中2でほぼ同じような指導が行

われているのは興味深い。そこでの扱い方や子どもの理解の違いを明らかにしておく必要がある。

③ 発見しそれを証明する過程に関して

高1での「チェバの定理」の授業で観察されたように、この定理の発見や、平行線を三角形の外部にひく補助線を利用したり面積を利用したりして行われる証明は、生徒にとって思いつきにくい。それだけに、定理の証明の際に生徒をより活動的にさせるには、生徒の証明力に相応しい展開をすることが不可欠である。またその前提として、例えば「角の二等分と線分の比」の性質とその証明について他の生徒のアイデアを共有しながら多様に解決していくというように、証明に至るまでの過程を大切に扱う授業を積み重ねていくことの重要性が明らかになった。

〈主な引用・参考文献〉

藤田太郎(2007),「最近のイギリスの算数・数学教育:初等教育算数のための指導規定1999年版導入後の動向」, 日本数学教育学会誌数学教育, 第89巻11号, pp.32-39.

國宗進・八田弘恵・熊倉啓之・近藤裕(2008), 「空間図形についての理解に関する研究—小中高を見通した空間図形カリキュラム—」, 日本数学教育学会第41回数学教育論文発表会論文集, pp.381-386.

DfES(2006), *Primary National Strategy, Primary Framework for literacy and mathematics*. DfES Publications.

QCA(2007), *National Curriculum for Mathematics KS3*.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計11件)

①原欣嗣・國宗進・八田弘恵・熊倉啓之・近藤裕, 空間図形についての理解に関する研究—球の学習に現れる類推の考え—, 日本数学教育学会第42回数学教育論文発表会論

文集, 査読有, 2009, pp.367-372.

② Kunimune S., Fujita T. and Jones K., 2009, “Why do we have to prove this?” Fostering Students’ Understanding of ‘Proof’ in Geometry in Lower Secondary School. *Proceedings of ICMI Study 19 on “Proof and Proving in Mathematics Education”*, Vol.1, pp.256-261. Taipei, Taiwan. 査読有.

③ Jones K., Kunimune S., Kumakura H., Matsumoto S., Fujita T. and Ding L., 2009, Informing the Pedagogy for Proof in Geometry: Learning from Teaching Approaches in the East and West. *Proceedings of ICMI Study 19 on “Proof and Proving in Mathematics Education”*, Vol.1, pp.232-237. Taipei, Taiwan. 査読有.

④ Kunimune S., Kumakura H., Jones K. and Fujita T., 2009, Lower Secondary School Students’ Understanding of Algebraic Proof, In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H.(Eds.). *Proceedings of the 33<sup>rd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3, pp.441-448. Thessaloniki, Greece: PME. 査読有.

⑤ 國宗進・八田弘恵・熊倉啓之・近藤裕, 空間図形についての理解に関する研究—小中高を見通した空間図形カリキュラム—, 日本数学教育学会第41回数学教育論文発表会論文集, 査読有, 2008, pp.381-386.

⑥ 熊倉啓之, 新学習指導要領の特徴とそれを生かす指導, 日本数学教育学会誌数学教育, 査読無, 2008, 第90巻第7号, pp.18-26.

⑦ Kunimune, S., Fujita T. and Jones K., 2008, Strengthening Students’

Understanding of 'Proof' in Geometry in Lower Secondary School. *Proceeding of CERME 6*. France. 査読有.

- ⑧ 國宗進, イギリスにおけるニューメラシーと数学的リテラシー, 日本数学教育学会誌 数学教育, 査読無, 2007, 第 89 卷 9 号, pp.31-40.
- ⑨ 八田弘恵・近藤裕・熊倉啓之・國宗進, 空間図形についての理解に関する研究—自ら見取図をかいて問題を解決する授業を通して—, 日本数学教育学会第 40 回数学教育論文発表会論文集, 査読有, 2007, pp.487-492.
- ⑩ 國宗進, 論証についての理解に関する総合的研究—図形の論証と文字式による論証の観点から—, 日本数学教育学会第 40 回数学教育論文発表会論文集, 査読有, 2007, pp.619-624.
- ⑪ 熊倉啓之, 学ぶ意義を実感させる積分の指導に関する研究—図形の計量に焦点を当てて—, 日本数学教育学会第 40 回数学教育論文発表会論文集, 査読有, 2007, pp.493-498.  
[学会発表] (計 2 件)
- ① 國宗進, 生涯学習社会における数学的リテラシー構築のための開発研究—概念理解と能力形成—, 科学教育学会第 32 回年会論文集, 査読無, 2008, pp.137-140, 自主企画課題研究(オーガナイザー岩崎秀樹), 岡山理工科大.
- ② 二宮裕之・國宗進, 技術的問題解決プロセスに算数・数学を位置づける, 科学教育学会第 31 回年会論文集, 査読無, 2007, pp.167-170, 自主企画課題研究(オーガナイザー小林辰至), 北海道教育大.  
[図書] (計 5 件)
- ① 國宗進, 他, 明治図書出版, 中学校新数学科の授業創り① 豊かな数学の授業を創る, 2009, pp.53-60, 134-143.

- ② 國宗進, 他, 明治図書出版, 中学校新数学科の授業創り② 新たな数学の授業を創る, 2009, pp.9-18, 77-88.
- ③ 中村享史, 明治図書出版, 数学的な思考力・表現力を伸ばす算数授業, 2008, 全 139.
- ④ 國宗進, 他, 東洋館出版社, 算数の力を育てる① 何のための算数教育か, 2007, pp.48-60, 148-160.
- ⑤ 國宗進, 他, 東洋館出版社, 算数の力を育てる③ 数学的な考え方を乗り越えて, 2007, pp.28-39, 62-73.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

國宗 進 (KUNIMUNE SUSUMU)  
静岡大学・教育学部・教授  
研究者番号: 50214979

### (2) 研究分担者

熊倉 啓之 (KUMAKURA HIROYUKI)  
静岡大学・教育学部・教授  
研究者番号: 00377706

中村 享史 (NAKAMURA TAKASHI)  
山梨大学・教育人間科学部・教授  
研究者番号: 70303394

大田 春外 (OTA HARUTO)  
静岡大学・教育学部・教授  
研究者番号: 40126769

山田 耕三 (YAMADA KOZO)  
静岡大学・教育学部・教授  
研究者番号: 00200717

松元 新一郎 (MATSUMOTO SHINICHIRO)  
静岡大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 40447660

### (3) 研究協力者

Johns, Keith  
サウザンプトン大学・教育学研究科・教授  
藤田 太郎 (FUJITA TARO)

プリマス大学・教育学部・講師  
近藤 裕 (KONDO YUTAKA)  
奈良教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 80551035

八田 弘恵 (HATTA HIROE)  
渋谷教育学園幕張中・高等学校・教諭  
早川 健 (HAYAKAWA KEN)

甲府市立新田小学校・教諭  
原 欣嗣 (HARA KINJI)  
浜松市立城北小学校・教諭