

機関番号 : 12102

研究種目 : 基盤研究 (C)

研究期間 : 2007 ~ 2010

課題番号 : 19540006

研究課題名 (和文)

無限次元の代数群とリー環の研究、およびその物質科学・生命科学への応用

研究課題名 (英文)

Study of infinite dimensional algebraic groups and Lie algebras, and applications to material science and life science

研究代表者

森田 純 (MORITA JUN)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授

研究者番号 : 20166416

研究成果の概要 (和文) :

無限次元の代数群とリー環の構造を研究した。特に双曲型カツ・ムーディ群の群構造について研究の進展が得られ、また局所アフィン・リー環の分類を完成した。有限・無限の文字列に付随する代数系を構成し、代数的にコントロールする原理を発見した。準結晶に代表される物質科学やDNA記号列に代表される生命科学への有用な数学的応用を確立した。

研究成果の概要 (英文) :

Some structures of infinite dimensional algebraic groups and Lie algebras have been studied. Especially, certain hyperbolic type Kac-Moody groups have been studied, and the classification of locally affine Lie algebras has been given. Algebraic theory related to finite and infinite sequences of letters has been created, and some algebraic method to control those sequences was found. Some useful mathematical applications to quasicrystals as material science and DNA sequences as life science have been constructed.

交付決定額

(金額単位 : 円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野 : 数物系科学

科研費の分科・細目 : 数学・代数学

キーワード : 代数群、リー環、物質科学、生命科学

## 1. 研究開始当初の背景

19世紀頃から開始された連続群・リー群の理論は、20世紀前半に大きな進歩があり、有限

次元半単純リー群(環)の分類、および有限ルート系の分類という一大成果に繋がった。また、20世紀後半より、無限次元をコントロ

ールする様々な手法が開発され始めた。p 進代数群の理論しかり、カツ・ムーディ理論しかりである。特にアフィン・リー環の理論は構造上でも応用上でも非常に重要で、その様々な一般化が模索されてきている。そういう流れの中で、理論が深まるにつれ、無限次元の代数群とリー環の新たな構造の発見、およびその関連分野（例えば物質科学や生命科学）へのリー理論や関連代数構造の新たな応用が模索されつつあり、理論の整備と研究の進展が期待されていた。

## 2. 研究の目的

無限次元の代数群の中で、カツ・ムーディ群について特に単純性に繋がる構造を解明すること、また無限次元のリー環の中で、局所アフィン・リー環の分類を完成させること、この2つは理論的にも是非とも解決しなければならない問題で、これに一定の決着をつけることが大きな目的である。また、これらの理論の応用として、物質科学や生命科学などの関連分野における最新テーマを攻略するために、代数的なアプローチを確立することも目的とする。

## 3. 研究の方法

カツ・ムーディ群に関しては、代数群論、有限群論、組合せ理論、建物理論、幾何学、解析学などについての最新成果を用いて研究を行った。局所アフィン・リー環に関しては、リー代数学、表現論、組合せ理論、ルート系、導分理論、群論などについての最新成果を用いて研究を行った。種々の応用に関しては、代数学、とくに代数群論、リー環論、半群論、多元環論、双代数理論、表現論、組合せ理論、可換体論、整数論などについての最新成果を用いて研究を行った。

## 4. 研究成果

### (1) 単純性に関する成果

有限次元の場合には、20世紀中に大きな進展があり、他の科学分野への貢献も含めて、著しい応用も見出されてきている。ところが、無限次元の場合には殆ど単純性に関する結果が知られていなかった。最近になり、有限体上のある種の無限次元群の単純性に関する研究が組織的に行われ、単純性も或る条件下では理論的に解明される様になってきていた。ここでは、無限体の新しい場合に、幾つかの無限次元カツ・ムーディ群の単純性を確認しながら、その背景にある未知の構造

を解明する突破口を見つけた。これを手がかりに、無限体の場合に今後の理論展開が発展することが期待される。完備化した場合には、非アフィン型のときにムーディ氏、アフィン型のときに研究代表者がそれぞれ単純性を証明しているが、それとの関連も徐々に明らかになっていくであろうことが予想され、今回の実験的研究により、今後の見通しが随分と良くなった。

(2) 局所アフィン・リー環に関する成果  
研究代表者等により、アフィン・リー環および拡大アフィン・リー環の一般化として、局所アフィン・リー環の概念が導入され、その重要性が認められてきている。特に、その中でも一般カツ予想の証明が非常に大きな成果であった。そういう研究の流れの中で、局所アフィン・リー環を是非とも分類する必要があったが、今回それを完成することが出来た。ある意味では技術的な集大成とも言えるが、新たな証明方法も開発し、そういう意味では技術的にも発展させることが出来た。

### (3) 応用

#### ① ムーディ予想

30年来の課題であった、ムーディ予想を完全に解決した。これは、カツ・ムーディ・リー環の上半部分環の微分環と自己同型群を決定するというもので、長い間、未解決のまま残されてきていた。今回、上記2つの基礎的な成果の応用として、これを完全に解決することが出来た。逆に、この結果を応用して、単純性の研究や局所アフィン・リー環の自己同型の決定に役立てることが出来る見込みで、相互に発展していく非常に良い応用例である。

#### ② 物質科学

綺麗な代数構造は美しい結晶構造と関連が深く、リー環やルート系の理論を始め、様々な直接・間接な関係が見出されてきているが、秩序のある非結晶構造に関しては、なかなか代数的アプローチは難しかった。特に近年になって注目されてきている準結晶構造は非常に面白いが数学的に解明するには、まだまだ新しい知見が必要であった。最も親近感のある数学分野はタイル張り理論であるが、現状では各個撃破的な研究が進められている段階である。今回は新たに、純代数的な試みを行い、タイル張りに付随する「群」、「多元環」、「リー代数」、「加群」、「組合せ理論」、「体」、「冪級数」、「スペクトル」など、夥しい不変量を導入し、その有効性を確認することが出来た。

#### ③ 生命科学

イネ黄斑病ウイルス遺伝子のDNA配列の

うち、最初の 13 文字

CCAGCUGCGCAGG

に対応する冪級数の係数は有理数体上で 2 次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{129})$  を生成し、またヒト性決定遺伝子の DNA 配列のうち、最初の 13 文字

ATGCAATCATATC

に対応する冪級数の全ての係数は有理数であることが見出された。これは驚きの大発見であった。これにより、配置・配列の組合せ構造を解析することによって得られる冪級数が、単なる数学的な抽象的意味に留まらずに、実際の意味を持つことの可能性が提示されたのである。これにより、生命科学への応用の入り口の扉が少しだけ開かれたことになる。

#### ④ オートマトン

文字列に対応する冪級数が、いつ有理数係数になるかという問題は、今までに全くなかった視点であり、非常に興味深い。2 文字  $A, B$  の場合、 $B$  が 2 回続かない、初めか終わりは  $A$  であるという条件で、この有理性定理が成り立つことが証明できた。これは、ある意味でオートマトンを特徴付けしているとも言える。この様な立場で眺めてみると、自然数、整数、有理数、実数という、単に数学における数の階層だけの話であると思われていたものが、基本的なオートマトンの構造の影に特徴付けとして影武者のごとく潜んでいることが発見されたのは衝撃的であった。今後の展開が期待される成果である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① 森田純, K. Zhao :  
Automorphisms and derivations of Borel subalgebras and their nilradicals in Kac-Moody algebras,  
Comm. Contemp. Math., 掲載許可済.  
査読有

② 森田純 :  
Tilings, Lie theory and combinatorics,  
Contemp. Math. 506, 2010, 173 -- 185.  
査読有

③ 森田純, A. Terui :  
Words, tilings and combinatorial spectra,  
Hiroshima Math. J. (1)39, 2009, 37 -- 60.  
査読有

④ 森田純, S. Berman :  
Conjugacy results for the Lie algebra  $sl_2$  over an algebra which is a UFD,  
Contemp. Math. 422, 2007, 17 -- 40.  
査読有

⑤ 森田純, H. Chiba, J-L. Guo :  
A new basis of  $U(sl_2)$  and Heisenberg analogue,  
Hadronic J. 30, 2007, 503 -- 512.  
査読有

[学会発表] (計 13 件)

①森田純 :  
Words, decomposition rules and invariants,  
The mathematics of aperiodic orders,  
Korean Institute of Advanced Study, Seoul, Korea,  
2010 年 9 月 25 日 - 9 月 30 日

②森田純 :  
Locally affine Lie algebras,  
Workshop on QFT, string theory and mathematical physics,  
KITPC, Chinese Academy of Sciences, 北京、中華人民共和国、  
2010 年 8 月 10 日 - 8 月 15 日

③森田純 :  
語・タイル張りの代数構造と組合せ構造、代数と言語のアルゴリズムと計算理論、  
京都大学、京都市、  
2010 年 2 月 16 日 - 17 日

④森田純 :  
語・タイル張りに付随する代数的組合せ構造の具体的計算例、  
高知タイル貼り小研究会、  
高知大学、高知市、  
2009 年 10 月 24 日 - 26 日

⑤森田純 :  
Algebraic approaches to words, tilings and quasicrystals,  
Japan-Korea workshop on algebra and combinatorics,  
九州大学、福岡市、  
2009 年 8 月 27 日 - 28 日

⑥森田純 :  
語、オートマトンおよび (リー) 代数的不変量、  
リー代数サマーセミナー、  
九州工業大学、北九州市、

2009年8月21日-22日

⑦森田純:

Algebraic structures and combinatorics of words, and golden mean shifts,  
準周期タイルと言語理論の周辺、  
京大数理研、京都市、  
2009年6月8日-10日

⑧森田純:

フィボナッチ数の数理、  
数学教材研究会、  
秋田工業高等専門学校、秋田市、  
2009年3月19日

⑨森田純:

Moody's conjecture,  
Canadian Mathematical Society Winter Meeting,  
Ottawa, Canada,  
2008年12月6日-8日

⑩森田純:

Moody予想とその解決、  
リー代数サマーセミナー、  
福岡教育大学、宗像市、  
2008年8月29日-30日

⑪森田純:

Words, tilings and combinatorics,  
Workshop on quantum affine Lie algebras,  
extended affine Lie algebras and applications,  
BIRS, Banff, Canada,  
2008年3月2日-7日

⑫森田純:

Group presentations, coverings and Schur multipliers in Lie theory,  
Workshop on algebraic aspects of Lie theory,  
Academia Sinica, Taipei, Taiwan,  
2007年12月20日-23日

⑬森田純:

UFD上のリー代数と共役性定理、  
リー代数サマーセミナー、  
海上保安大学校、呉市、  
2007年8月31日-9月1日

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~morita>

6. 研究組織

(1)研究代表者

森田 純 (MORITA JUN)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授  
研究者番号: 20166416