様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月２８日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2007～2009
課題番号：１９５４００１３
研究課題名（和文）　多元環上の完全鎖複体と導来同値の研究

研究課題名（英文）　Study of perfect complexes over algebras and derived equivalences

研究代表者
宮地　淳一（MIAYCHI　JUN-ICHI）
東京学芸大学・教育学部・教授
研究者番号：50209920

研究成果の概要（和文）：完全環の加群の安定圏に於いてコンパクト対象であることと有限生成加群であることは同値であることを示し、自己入射多元環の加群の安定圏が三角圏であることを使い、安定圏での森田の理論の類似が成り立つことを示した。三角圏の n 個の部分圏に対し、連続回帰的な stable t-structure となっているという新概念を提示した。これが連続回帰的な recollement が得られることと同値であることを示した。

研究成果の概要（英文）：We show that any module is compact if and only if finitely generated in the stable module category over a perfect ring, and that there is results which is similar to ones in Morita theory. We introduce the new structure for n subcategories of a triangulated category that there are consecutive and recursive stable t-structures, and that this notion is equivalent to the one of consecutive and recursive recollements of a triangulated category.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,500,000	450,000	1,950,000
２００８年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学
キーワード：環論、導来圏

１．研究開始当初の背景

導来圏は、もともと可換ネーター環および代数幾何学の研究において、Serre-Grothendieck 双対定理を定式化する目的で Grothendieck と Verdier によって導入された概念である。それまでの可換ネーター環および代数幾何学の研究においては、Serre 双対、Riemann-Roch の定理などの種々のホモロジー代数的、K-理論的不変量を測ることによって発展し、位相幾何学の手法から局所コホモロジーの道具を得て、正則局所環、

Gorenstein 環、Cohen-Macaulay 環上で双対加群を使って、加群に関しての局所双対定理が得られている。Grothendieck は可換環上の加群圏、スキーム上の層の圏の導来圏、三角圏と導来関手、∂関手の理論を導入し、ネータースキーム間の固有射に関してのSerre-Grothendieck 双対定理を示し、局所コホモロジーとの関係を与えた。

非可換ネーター環においては、可換環での正則局所環、Gorenstein 環、Cohen-Macaulay 環に対応する概念として、正則多元環またはAuslander 正則環、Auslander-Gorenstein 環、Gelfand-Kirillov 次元に関してのCohen-Macaulay 性などの環の概念が出された。量子群や非可換代数幾何の研究において主要なテーマである微分作用素環、有限次元Lie 多元環の普遍包絡多元環、３次元Artin-Schelter 正則多元環に、共通する性質として Auslander-Gorenstein 性があることが分かり、Bjork, Artin, Stafford を初めとする多くの研究者が盛んにこれらの環を研究している。また、Yekutieli, Zhang 等によって非可換ネーター多元環上での双対鎖複体とその導来圏の研究が行われている。

また、非可換環における導来圏の研究に関して、傾斜鎖複体の概念が Rickard によって導入され、環の加群圏の導来圏同値を導きだすという導来圏での “ 森田の理論”が存在することを示した。この理論は、代数多様体上の連接層の導来圏での傾斜層、傾斜鎖複体の概念へと発展し、このような層を持つ代数多様体と有限次元多元環の導来圏同値があることがわかった。これはそれ以前にBeilinson によって射影空間上の連接層の導来圏が有限次元多元環上の有限生成加群の導来圏の間の三角圏同値や、Kapranov が示したグラスマン多様体、フラッグ多様体上の連接層と多元環の三角圏同値の統一的な説明を与えることとなった。さらに、Kontsevich, Rosenberg は非可換射影空間の概念を導入し、その導来圏と有限次元遺伝的多元環の導来圏が圏同値になっていることを示した。研究代表者は、非可換連接環上において余傾斜双加群および余傾斜双鎖複体が、加群圏の導来圏の双対を導くことを示し、非可換ネーター環上の余傾斜双加群および余傾斜双鎖複体の極小入射分解に直既約入射加群がすべて現われるという residual 性の類似が成り立つことを示した。さらに、余傾斜双鎖複体の存在することと、加群の導来圏どうしの間に双対が存在する事が同値であるという導来圏での“森田の双対理論″が存在することを示した。また双対鎖複体を持つ可換環上の有限生成加群となっている非可換多元環においては、双対鎖複体から余傾斜双鎖複体を構成できることを示し、余傾斜双鎖複体が可換環での双対鎖複体の概念の拡張になっていることがわかった。

これらの研究の過程で一連の導来圏の構造を解明するには三角圏での道具、圏論的性質を調べることが非常に有効であることがわかってきた。特に三角圏における研究に関して、コンパクトオブジェクトという特殊な性質を持った対象とコンパクト生成三角圏における構造が解明され、代数的位相幾何学での Brown の表現可能定理、随伴関手の存在定理等がコンパクト生成三角圏で成り立つことが Neeman によって示された。これにより先のスキームでの導来圏におけるGrothendiek 双対定理は三角圏での随伴関手存在定理で説明出来ることがわかり、導来圏での森田の理論もコンパクト生成三角圏によって見通しよく説明できることがわかってきた。また、非可換環上、スキーム上のいずれの導来圏でもコンパクトオブジェクトの概念と完全鎖複体の概念は一致していることが Rickard, Bondal-Van den Bergh によってそれぞれ示された。また、導来同値を導く鎖複体の構成を微分次数圏で構成する方法が Keller, Toën 等によって研究されている。そこではまたホモトピー理論の枠組みから着想を得ている。

２．研究の目的

導来圏でのホモロジー代数的不変量に関して、代数幾何学での可逆層でつくられるPicard 群の拡張として導来圏での傾斜双鎖複体によってつくられる“導来 Picard 群″や、導来圏の自己同型群の概念が代数多様体、非可換多元環、有限群の表現のそれぞれの分野の研究者達によって導入された。それぞれの群がどのような構造になっているのかという問題を様々な研究者によって調べられている。特にスキーム上の層の導来圏の自己同型は Fourier-Mukai transform になっているかという問題に関して、豊富な標準層または反標準層を持つ平滑な射影多様体の場合、導来圏の自己同型は肯定的に Bomdal-Orlov によって解かれている。一方、非可換環上の加群の導来圏の自己同型が傾斜双鎖複体によって引き起こされた同型かという問題に関して、研究代表者と Yekutieli は有限次元遺伝的多元環の場合には成り立つことを証明し、さらに導来圏の導来 Picard 群を解明することに成功し、その結果非可換射影空間の導来 Picard 群がどのようなものかを解明した。

代数多様体、ネーター環、非可換多元環のいずれの場合にも、その導来圏での完全鎖複体と呼ばれる鎖複体が重要な構造を形成しており、さらに完全鎖複体の中でも特別な完全鎖複体が重要な役割を演じているということである。

これらの完全鎖複体を研究するには、代数曲面、可換環、非可換多元環でのからの層や加群の個々の性質の研究だけではなく、統一的な見通しとしてホモトピー理論の枠組みでの微分次数圏の構造、性質、そこから得られる鎖複体、導来同値の研究が必要である。そこで、我々は代数多様体と有限次元多元環上の導来圏間の圏同値を導き出す完全鎖複体の性質の解明、微分次数圏からの完全鎖複体の構成方法を解明を研究目的とし、その見地からの多元環、ネーター環上のホモロジー代数的、導来圏上の不変量の記述をする。
具体的には、
（１）可換ネーター環および代数多様体のホモロジー代数的、ホモトピー理論的な特徴づけと、導来圏上での鎖複体の圏的な性質の解明、
（２）微分次数圏におけるホモトピー理論的性質の記述とそこから三角圏での圏的性質の解明。
（３）非可換多元環において、微分次数圏の性質から完全鎖複体の構成方法の解明とそれによって導かれる導来同値でのホモロジー代数的、導来的不変量の解明を行う。

３．研究の方法

研究の目的の（１）に関しては、可換ネーター環上での鎖複体がひき起こすホモロジー代数的不変量と導来圏での役割の研究、（２）に関しては、ホモトピー理論的性質の記述とそこから発生する条件から導かれる完全鎖複体の導来圏的性質の研究、（３）に関してはに関しては非可換多元環において導来圏の間に圏同値が存在する場合の（２）との関係した圏的条件を主に研究した。

射影代数多様体と多元環の導来圏同値に関しては、最初に Beilinson が n 次元射影空間上の連接層の導来圏が、多元環の有限生成加群の導来圏と三角同値になることを Koszul 鎖複体を使って証明した。そして、Baer が重み付き n 次元射影空間上の連接層の導来圏と多元環の有限生成加群の導来圏間の三角同値を重み付き Koszul 鎖複体を使って証明した。Kapranov がグラスマン多様体上の連接層の導来圏が、多元環の有限生成加群の導来圏と三角同値になることを Young 図形を使って証明し、その後 Flag 多様体、quadrics 上の連接層の導来圏と多元環の加群の導来圏間の三角同値を証明している。いずれの場合も導来圏に現れる完全鎖複体から作られる微分次数多元環を考えると、その微分次数圏との間に導来関手が存在し、完全鎖複体が導来圏を生成するときには導来同値になっていることがわかる。従って、鎖複体を組み合わせ的な性質から見ることによって微分次数多元環の構造を調べるということが重要な視点になっていることが分かる。実際の例を考えるには、多項式環上の次数付き加群から作られる鎖複体を計算する方法を取り、（１）における射影代数多様体上の完全鎖複体上の性質や、（２）での性質をどのように反映しているかの検証、（３）におけるホモロジー代数的不変量との比較、カテゴリー的不変量、完全鎖複体を調べ、類推をおこなう。それには、近年"Mathematica", "Macaulay", "Singular"といった多項式環上の加群、次数付き加群、加群の自由分解などを Gröbner 基底の理論を使いコンピュータで計算できるようにするこれらのコンピュータソフトを使い、実際の多元環上の 加群の射影分解や自由分解等の鎖複体の構造を、コンピュータで計算することによって環上の鎖複体の構造を把握し類推した。

また、上記の研究をおこなう上で、他の研究者と十分コミュニケーションを取ることは必須である。（１）の研究に対して、可換環や代数幾何学関係のシンポジウムの中で、導来圏同値を導く完全鎖複体、導来圏上の鎖複体と種々の可換代数でのホモロジー代数的不変量に関係した研究発表があるものに参加し，代数多様体での鎖複体における組み合わせ的な性質と、加群のホモロジー代数的な量との関係、鎖複体の導来圏的な性質との関係等の研究を行ったものを重点的に資料収集し，研究討議をおこなった。

代数多様体や多元環の導来圏に関する研究は、Bondal, Orlov, Toën, Keller 等を初めとする微分次数圏の研究の中で、ホモトピー理論的性質の研究には顕著なものがあるので、その研究調査、討議は重要である。
従って、（1）、（2）、（3）に対して他の研究者を呼んで、多元環の組み合わせ的な条件から構成される完全鎖複体に関する研究を重点的に研究討議をおこなった。
さらに、代数幾何学ともども非可換多元環関係の中心に行われているシンポジウムの中で導来圏での完全鎖複体、導来圏での不変量に関しての研究発表があるものに参加し，（２）、（３）の研究に関しての資料収集、研究討議をおこなった。

４．研究成果

多元環上または代数多様体での鎖複体の圏に於ける完全鎖複体は、加法圏において対象の直和へ写像の値域が有限直和の範囲に収まっているというコンパクト対象の性質を持っていることが非常に有用である。フロベニウス多元環や、可換 Cohen-Macaulay 環上の加群の導来圏の商圏として、加群の安定圏が得られることは、Rickard, Buchweitz などによって示され、そこでのコンパクト対象がどのようなものかを研究することも重要になってきていた。また、加群の圏において有限生成加群がコンパクト対象であること

は周知の事実として知られ、加群の圏どうしが同値となる森田同値をみたすことと有限生成加群の圏どうしが同値なることが必要十分であることは森田の理論として知られていた。しかし、加群の安定圏においてはそれに対応するものが無かった。そこで完全環おいては加群の圏、安定圏の両方の圏においてコンパクト対象は有限生成加群であることを示し、有限生成加群は圏論的な性質によって不変であることを示した。これにより、森田の理論と同じように完全環上の加群の安定圏どうしの圏同値が有限生成加群の安定圏どうしの圏同値を導くことを示した。また、圏同値が存在する場合、導来圏においては傾斜鎖複体、加群の圏では射影生成加群という圏同値を導く対象が存在するが、安定圏においてはそのようなものが存在するか一般にはわからない。フロベニウス多元環上の加群の安定圏は三角圏になっていることを使って、有限生成加群の安定圏どうしの圏同値から、加群の安定圏どうしの圏同値を導くという安定圏での森田の理論の類似が成り立つことを示した。

可換 Gorenstein 環 R 上において、ホモロジー群が有界な上に有界な有限生成射影加群の鎖複体のホモトピー圏を完全錯複体の成す部分圏による商圏は、正則局所環の場合 0 となり、特異点の状態を示す三角圏として知られている。この三角圏が、R 上の極大 Cohen-Macaulay 加群によって構成される安定圏と圏同値であることはBuchweitzによって示され、多くの研究者が特異点を持つ代数多様体の研究に役に立てている。我々の本年度の研究では、ホモロジー群が有界な非有界な有限生成射影加群の鎖複体の圏を完全錯体の成す部分圏による商圏を考えることによって、こうした枠組みがより一般の場合に適用ができることが分かり、それが Beilinson, Bernstein と Deligne によって導入された三角圏の Recollement という状態になっていることがわかった。我々は、R が非可換岩永ゴ-レンシュタイン環のとき上記の三角圏が安定 t-構造の三角形という状態であることがわかった。環 R の三角行列環上の拡張された極大コーエン・マコーレー加群の安定圏と圏同値でることを示した。これについてはさらに、次年度にかけて総合的に解析を進める予定である。

これまで三角圏Dにおいて部分圏の組(U,V)に対してstable t-structureという概念を導入し、それが三角圏の局所化、余局所化の概念と一致することを示し、Beilinson, BernsteinとDeligneによって導入された三角圏のRecollementという状態との関連、多元環の導来圏における部分圏と導来圏局所化に関する研究をおこなった。これを本研究でさらに発展させ、三角圏Dの部分圏U_1, U_2, … , U_nに対して(U_1, U_2), (U_2, U_3), …, (U_n, U_1)がstable t-structuresとなっている概念を新たに提示した。このときまず、Dにはn個のrecollementが存在することを示した。この性質からこの構造を“recollementsのn角形”と呼び、(１) 部分圏U_{i-1}とU_{i+1}が全て三角圏同値なること、(２) この構造を保存する三角関手等の性質, 特に圏同値になるにはnが奇数のときは１つの部分圏、nが偶数のときは部2つの部分圏に於いて三角圏同値を示せば、全体の三角圏同値が成り立つことを示した。これを応用して、Rが非可換岩永Gorenstein環のとき、有限生成射影加群の上に有界な鎖複体のホモロピー圏の有界鎖複体のホモロピー圏による商圏とCohen-Macaulay加群の安定圏が三角圏同値であるというBuchweitzの結果をさらに、総合的に解析を進めた。

この他の結果として、ネーター局所環 A に対して Â をその極大イデアルの位相での完備化とする。Grothendieck 群 $G_0(A)$ から $G_0(\hat{A})$ への自然な射を考えその核が non-zero torsion になる例が Hochster により構成された。研究連携者の蔵野和彦は non-zero non-torsion になるような例を構成した。その例では、A の non-normal class group (余次元 1 の Chow 群) から Â のそれの核が Z と同型である。また、$\mathbf{Z}^2$ graded ring のダイアゴナル部分環の性質を議論した論文である。いつ、有理特異点になるかなどを扱っている。また、この理論を使って、スムーズな多様体 X で $H^1(X, O_X)=0$ かつ $H^1(X, O_X(1))\neq 0$ なる例を作った。Danilov の理論により、この X のアフィンコーンの因子類群は、有限生成であるが、完備化すると同形ではないことがわかる。

５. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3 件)

① Kazuhiko Kurano, Ei-Ichi Sato, Anurag K. Singh, And Kei-Ichi Watanabe, Multigraded rings, diagonal subalgebras, and rational singularities, J. Algebra, 査読有, 322 (2009) 3248-3267.
② Kazuhiko Kurano, Vasudevan Srinivas, A local ring such that the map between Grothendieck groups with rational coefficients induced by completion is not injective, Michigan Math. J., 査読有, 57 (2008) 485-498.
③ Jun-ichi Miyachi, Compact objects in stable module categories, Arch. Math., 査読有, 89 (2007) 47-51.

〔学会発表〕(計 3 件)

① Jun-ichi Miyachi, Polygons of recollement, Kyoto RIMS workshop Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics, 2009年8月27日, 京都大学
② Jun-ichi Miyachi, Brown representability and localization of homotopy categories, Kyoto RIMS Workshop Algebraic Triangulated Categories andRelated Topics, 2009年7月23日, 京都大学
③ Jun-ichi Miyachi, Recollement of homotopy categories and stable categories, ホモトピー論シンポジウム, 2007 年 11 月 14 日, 金沢市観光会館

６．研究組織

(1)研究代表者

宮地　淳一 (MIYACHI　JUN-ICHI)

東京学芸大学・教育学部・教授

研究者番号：50209920

(2)研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

蔵野　和彦 (KURANO　KAZUHIKO)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：90205188