様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月２１日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００７～２００９
課題番号：１９５４００２７
研究課題名（和文）　量子群のスーパー化および楕円化を含む一般化およびワイル亜群

研究課題名（英文）　Generalized quantum groups, including super and elliptic ones, and Weyl groupoids

研究代表者
山根　宏之（YAMANE HIROYUKI）
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：10230517

研究成果の概要（和文）：２００６年に山根は Heckenberger との共同研究でワイル亜群の公理を導入しワイル亜群が松本型定理を満たすことを証明していた。この結果を利用して２００８年に彼らは１のべき根で定義される（スーパーを含む）一般化された量子群のシャポバロフ行列式の因数分解を与える公式をワイル亜群の最長元を用いて与えた。この研究は１のべき根での特殊な状況を積極的に用いた画期的なものである。この定理は特別な仮定のもとでは複数の人々が得ていたがその証明は単純リー代数に対するシャポバロフの元の結果に帰着するものであった。

研究成果の概要（英文）： In 2006, Yamane, with Heckenberger, introduced axioms of Weyl groupoids and showed that Weyl groupoids satisfy a Matsumoto-type theorem. In 2008, using this result, they gave a factorization formula for the Shapovalov determinants of generalized quantum groups, including quantum superalgebras, by using the longest elements of the Weyl groupoids. This study is epoch-making since it was achieved by using intensively a special situation happened at roots of unity. Under some special conditions, simlar theorems were shown by several people, but their proofs were made by using the Shapovalov’s original result for the simple Lie algebras.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００７年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| ２００８年度 | 700,000 | 210,000 | 910,000 |
| ２００９年度 | 700,000 | 210,000 | 910,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 2,200,000 | 660,000 | 2,860,000 |

研究分野：数物系化学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：ワイル亜群、ニコルス代数、量子群、スーパー代数、ホップ代数

## １．研究開始当初の背景

単純リー代数やカッツ・ムーディーリー代数の対称性を記述するワイル群の重要性はそ

の表現論を等を研究する強力な手段として広く認識されてきた。例えば今まで知られている最高ウエイト加群の指標公式（ワイルの指標公式やカズダン・ルスティックの指標公式等）はワイル群を用いて記述される。一方１９７７年ごろよりリー代数の拡張した概念であるリー超代数を研究する重要性が物理等の要請より認識されてきた。しかしながらリー超代数にはワイル群にあたるものがなくその表現論は主にパリティーが０の部分のリー代数のワイル群を用いて研究されてきた。それでもなおリー超代数にはワイル群にあたるものがあってそれは群ではなくて亜群であるのではないかという事が複数の人々によって指摘されていた。はっきりした定義はなかったがワイル亜群という名前はすでに複数の文献に現われていた。

１９８５年頃、ドリンフェルドと神保は独立にカッツ・ムーディーリー代数Ｇの普遍展開環 U(G)の q-アナログーとして量子展開環 Uq(G)を導入した。さらにドリンフェルドは普遍Ｒ行列 R∈Uq(G)⊗Uq(G)が存在し、Ｒが量子二重構成法と呼ばれる方法で具体的に構成される事を示した。Ｒの形そのものが役に立つ事はそれ程多くないがその存在性が結び目理論、可解格子模型、共形場理論などに現れる具体的なＲ行列をもちいた研究に及ぼした哲学的な影響は計り知れない。Uq(G)はもともと生成元と関係式により定義されるものであったが、量子二重構成法によりUq(G)が生成元と関係式を用いないでもっと自然な方法で定義する事が可能であることが明らかにされた。そのことがアンドラスキューヴィッチ・シュナイダーによる（点付）Hopf 代数の分類プログラムの発想のもとになった。このプログラムの思想のもとで Heckenberger は任意の双指標χに対して量子二重構成法によって定義される一般化された普遍展開環 Uq(χ)の中で有限型PBW型基底をもつものを分類した。この研究で Heckenberger はワイル亜群を積極的に用いた。この時点での定義は公理を用いたものではなかった。なお任意のχに対して Uq(χ)が PBW 型基底をもつ事はカルチェンコの理論により知られている。

研究開始当初は Heckenberger との共同研究でワイル亜群の適切な公理を見つけ出しその公理をもとに松本の定理、すなわち同じ元の異なる２つの被約表示はコクセター関係式のみで移りあう事を主張する定理、を証明した直後であった。ワイル亜群が量子群の表現論に役に立つかどうかまでは分かっていなかった。

２．研究の目的

（１）ワイル亜群を用いて一般化された量子群 Uq(χ)の表現論や構造論を研究するのが目的であった。とくに最高ウエイト既約加群の普遍的な構造をワイル亜群用いて明らかにするのが目的であった。

（２）楕円リー代数およびその拡張であるリートーラスの構造論を研究するのが目的であった。

３．研究の方法

海外出張で海外の研究所を訪問し直接共同研究者と会うことによって研究の主題を議論した。その他ｅメールによって議論を繰り返した。

詳しくは次の通りである。

平成１９年度は、ドイツ国ライプチヒ大学の Heckenberger を訪問してワイル亜群の松本の定理に関する論文を完成させ Math.Z に投稿した。その３ヶ月後に受理されれた。また Fabian Spill とも面会し Heckenberger, Spill,Torrielli との４人共著論文について話し合った。こちらは RIMS Kokyuroku Bessatsu B8 に投稿し８月末に受理された。平成２０年度は１月にイランより Isfahan 大学の Saeid Azam 教授(Bulletin of the Iranian Mathematical Society の編集長)、Malihe Yousofzadeh 助教に来日していただき研究打ち合わせとともに大阪大学数学教室、筑波大学数学教室で講演をしていただいた。６月にその頃 Heckenberger が所属していたミュンヘン大学数学教室を訪問しホップ代数セミナーで発表をした。そのときに Heckenberger との議論で１のべき根で定義される量子群の Shapovalov 行列式の一次式への因数分解が従来知られていた証明法よりももっと本質的な証明法があることに気がついた。８月にはアルゼンチン・コルドバ大学数学教室のアンドラスキューヴィッチ教授を訪問しホップ代数セミナーで発表をし、アルゼンチン・メンドーサでのあるアルゼンチン数学会年会ではホップ代数セッションで発表するとともに座長をさせていただいた。１２月にはイランを訪問し Isfahan 大学数学教室,Qom 大学数学教室,Arak 大学数学教室で発表を行うとともに S.Azam, M.Yousofzadeh との共著論文作成に着手した。平成２１年度は９月にアルゼンチン・コルドバに於ける国際研究集会「Colloquium on Hopf Algebras, Quantum Groups and Tensor Categories (La Falda, Sierras de Cordoba, Argentina, August 31st to September 4th, 2009)」で講演「Recent progress on Drinfeld doubles and BDFG-type Lie tori, Hiroyuki Yamane, August 31st 12:20-13:00」を行った。講演内容は主に上記のイラン人数学者達との共同研究の結果とドイツ在住ハンガリ

一人数学者 Heckenberger との共同研究で得られた一般化された量子群のシャポバロフ行列式の因数分解についてである。この研究集会はドイツ・ミュンヘン大学のシュナイダー教授の６５歳の誕生日のお祝いを兼ねたものであったが H. Schneider をふくむ複数の講演者の講演で２００８年の私と Heckenberger との共同研究であるワイル亜群の松本の定理が最近のホップ代数の分類理論に深く寄与している事が報告された。

４．研究成果

(1) Heckenberger との共同研究で１のべき根で定義される量子群を含む（スーパーを含む）一般化された量子群のシャポバロフ行列式の因数分解を与える公式をワイル亜群の最長元を用いて与えた。この研究は一のべき根での特殊な状況を積極的に用いた画期的なものであり表現論、とくにカズダン・ルスティック理論、の研究手法に新しい哲学を与えたと言ってよいと思われる。シャポバロフ行列式の因数分解の公式に現われる因子は正ルートと一対一に対応するがその理由は従来のヤンツェン型フィルター付けによる証明法では理解できない状況であった。しかしながらこの問題を解こうとするときに誰もがまず考えてみるのが因子の存在性をヴァーマ加群のある特殊な特異ベクトル用いて示す証明法であろう。実際、この証明法で単純ルートに対応する因子の存在性は簡単に分かる。しかし単純でない正ルートに対応する因子の存在性はこの証明法では無理があった。一方 Heckenberger によりワイル亜群が $U_q(\chi)$にルスティック型同型写像として作用することが示されていた。$U_q(\chi)$の正部分 $U_q(\chi)^+$が有限次元のときはヴァーマ加群が有限次元であるのでこのルスティック型同型写像がヴァーマ加群にも作用する。このことにより単純ルートに対応する特異ベクトルは他の他の正ルートに対応する特異ベクトルに移る。よって因子の存在性が示せた。したがって $U_q(\chi)^+$が有限次元のときは上で述べた誰もがまず考えてみる証明法で証明できた。$U_q(\chi)^+$が無限次元のときは有限次元のときに帰着して証明できた。

　普通の量子群のシャポバロフ行列式の因数分解は q が１のべき根ない時はデコンチニ・カッツによって１９８９年に得られた。q が１の素数べき根のときがクンマー・レツェラーによって１９９７年に得られた。

　我々の証明法は単純リー代数に対しても有限体を考えることによって適用することが出来る。

　我々の証明はほとんど $U_q(sl2)$の表現論しか用いない初等的なものであり有限次元のときはヴァーマ加群や旗多様対が意外と簡単な形をしているのではないかという期待を抱かせるものである。

　今後の研究方針としてはアフィン型や一般のカッツ・ムーディー型のときにこの証明法がどこまで使えるのかを探る事である。

(2) Heckenberger、Spill、Torreilli と共同でアフィン型スーパー量子代数 $U_q(D(2,1;x)^{(1)})$のドリンフェルド第２実現を見つけた。

　アフィン型量子代数のドリンフェルド第２実現はドリンフェルドにより発見され有限次元表現の分類がドリンフェルド多項式と対応している事を示すのに用いられた。ドリンフェルド第２実現の存在性はベックによりアフィンワイル群を用いて再証明された。有限次元表現の分類はチャリ・プレスリーにより再証明された。

　我々は最近の物理の AdS/CFT 対応の研究の発展との関連から $U_q(D(2,1;x)^{(1)})$を調べ始めた。物理的には x→１のとき現われる $U_q(sl(2|2)^{(1)})$の中心拡大が重要である。

　我々の証明はほぼベックの証明に沿っていて $D(2,1;x)^{(1)}$ 型アフィンスーパーリー代数のアフィンワイル亜群を用いた。しかしながらベックの証明ではヌルベクトル達の可換性を示すためにディアミニの $U_q(sl2^{(1)})$の PBW 定理の証明に使われたアイデアを用いていてそこは $U_q(D(2,1;x)^{(1)})$では使えないところであった。そのかわり別のもっと直接的な証明を与えた。上で述べた事情からベックの証明では q が超越的でなければいけなかったが我々の方法を用いると q が１のべき根でなければ補える。

　今後の研究方針としては他のアフィン型スーパー量子代数についてドリンフェルド第２実現を見つけ（A(m,n)型については山根によってすでに見つけられている。）それを利用してチャリ・プレスリーの証明法に沿って有限次元表現の分類を行う事である。

(3) Saeid Azam, Malihe Yousofzader との共同研究で BDEFG 型のリートーラスと呼ばれる無限次元 Lie 代数の有限個の生成元と有限個の定義関係式による記述をおこなった。証明はそれほど簡単ではなく Bermann-Moody 学派の Recognition 定理を本質的に必要とする。リートーラスはアフィンリー代数、楕円リー代数を含む概念であり当研究はこれらのリー代数の構造論や表現論の統一的な性質を明らかにするために役立つと思われる。

(4) Saeid Azam, Malihe Yousofzader との共同でアフィンルート系、楕円ルート系、楕円リー代数について教育的な研究を行い論文を作成した。アフィンルート系の基の存在

はよく知られていたがその証明は直接的な計算で示すかまたはマクドナルドによる離散群の位相的性質を用いたものしかなかった。我々は完全に代数的な議論でその存在性を有限ルート系の基の存在性のみを用いて示した。この事を用いて楕円ルート系の性質を調べた。そして階数が２以上の楕円リー代数のヌルルートの重複度を求めた。各々の斎藤マーキング直線上のヌルルートの重複度は求めるのは比較的簡単であるが、その結果をもとに全てのヌルルートの重複度を与える公式を証明する議論を分かり易く整備する事に数年を要した。全ての斎藤マーキング直線を用いる関係上ここで扱った楕円ルート系は斎藤楕円ディンキン図形が与えられているものだけでは足らなかった。

この仕事は楕円ヘッケ代数と関係しているはずであり、将来、マクドナルド多項式と楕円リー代数との関係が明らかにされるときに役に立つと思われる。

(5) スーパーリー代数にも岩堀Hecke代数にあたるものがあるのかを考察しひとつの候補をみつけた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Exposition on affine and elliptic root systems and elliptic Lie algebras, Saeid Azam, Hiroyuki Yamane, Malihe Yousofzader, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu. (2010)　巻・頁は未定，査読有

② Finite presentation of Lie tori, Saeid Azam, Hiroyuki Yamane, Malihe Yousofzader, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ. 46 (2010), 553-594　査読有

③ Iwahhori-Hecke type algebras associated with the Lie superalgerbas A(m,n), B(m,n), C(n) and D(m,n), Hiroyuki Yamane, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B11 (2009), 197-222　査読有

④ Drinfeld second realization of quantum affine superalgebras of D^{(1)}(2,1;x) via the Weyl groupoid, I. Heckenberger, F. Spill, A. Torrielli, H. Yamane, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B8 (2008), 171-216　査読有

⑤ A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem, I. Heckenberger and H. Yamane, Mathematishe Zeitschrift, 259 (2008), 255-276　査読有

〔学会発表〕（計１件）

①Hiroyuki Yamane, Recent progress on Drinfeld doubles and BDFG-type Lie tori, 2009年8月31日アルゼンチン、コルドバ
Colloqium on Hopf Algebras, Quantum Groups and Tensor Categories
(La Plada, Sierras de Cordoba, Argentina,August 31st to September 4th, 2009)

〔その他〕
ホームページ等

http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~yamane/

６．研究組織
(1)研究代表者
山根　宏之（YAMANE HIROYUKI）
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：10230517

(2)研究分担者
三木　敬（MIKI KEI）
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：40212229
(H20、H21年度は連携研究者)

永友　清和（NAGATOMO KIYOKAZU）
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：90172543
(H20、H21年度は連携研究者)

大山　陽介（OHYAMA YOUSUKE）
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：10221839
(H20、H21年度は連携研究者)

川中　宣明（KAWANAKA NORIAKI）
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：10028219
(H20年度は連携研究者)

伊達　悦朗（DATE ETSURO）
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：00107062
(H20、H21年度は連携研究者)