

平成 22 年 5 月 10 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2010

課題番号：19540040

研究課題名（和文）数式処理ソフトを利用した保型形式と保型関数の理論の研究

研究課題名（英文）Research on the theory of modular forms and modular functions  
Using Mathematica software system

研究代表者

小池 正夫 (KOIKE MASAO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：20020733

研究代表者の専門分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：保型形式、保型関数、 $p$  進整数、 $p$  進的保型形式、

マッカイ・トンプソン級数、extremal な保型形式

## 1. 研究計画の概要

(1) モジュラー群とレベル 2 と 3 のフリッケ群に関する extremal な保型形式のフーリエ係数を計算して、その数論的な性質を探る。

(2) モジュラー不変量  $j(z)$  を含むマッカイ・トンプソン級数のフーリエ係数の素数 2, 3, 5, 7 に関する可除性を調べる。

(3) レベル 2, 3, 5, 7, 11 のモジュラー方程式が多項式型となるものをマッカイ・トンプソン級数の中で探す。

(4) マッカイ・トンプソン級数から得られる  $p$  進型保型形式の係数の  $p$  進的性質について調べる。

(5) レベル 2 のフリッケ群に対して超特異多項式を計算して、その数論的な性質を探る。

## 2. 研究の進捗状況

(1) Extremal な東に付随する保型形式のフーリエ係数は全て整数である。その  $n$  乗根のフーリエ係数がまた全て整数であるような  $n$  がスローンらによって調べられていた。 $n$  が 2 べきまたは 3 べきの場合に、東がないときでも Extremal な保型形式がより単純なデータ級数とある modulo で合同式が成り立つことが証明でき、それを利用してスローンらの結果を拡張することができた。それを論文として出版した。

(2) モジュラー不変量  $j$  を含むマッカイ・トンプソン級数のフーリエ係数の素数 2, 3, 5, 7 に関する可除性に関する計算のデータは大量に得られた。その結果は、(4)における定理の発見に貢献した。

(3) レベル 2, 3, 5, 7, 11 のモジュラー方程式が多項式型となるものをマッカイ・トンプソン級数の中で探すことができた。レベル 2 の場合は Elkies が求めていたリストに更に追加する例を求めることができた。レベル 2, 3, 5, 7 では Lehner の結果に更に追加する例を求めることができた。

(4) アトキンがモジュラー不変量  $j(z)$  に適用して 2 進的保型形式を求めた方法をレベル 2 のマッカイ・トンプソン級数に対して適用して 2 進的保型形式を求めて、それらが一致することを示した。さらに同じレベル 2 の保型関数  $f$  で、無限遠点のカスプで 1 位のゼロ点、有理点 0 で 1 位の極をもつものからも同じ 2 進的保型形式を得た。これを  $f$  のべき級数として展開したときの 2 進整数の 2 進位数が簡単な公式をもつことを証明できた。これは論文として掲載が決定されている。

(5) レベル 2 のフリッケ群に対して超特異多項式を計算して、モジュラー群に対して既に研究されている超特異多項式の持つ数論的な性質が、この場合にも成り立つことを確認できた。

### 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。  
論文として発表した結果を既に2つ得ている。論文にはしていないが、興味ある計算結果も手に入れることができた。3進的な保型形式については、2進的な場合には現れなかった困難さがあることがわかり、それを解決するために、新しいアイデアをつかんだ。

### 4. 今後の研究の推進方策

アトキンがモジュラー不変量  $j(z)$  に適用して3進的保型形式を求めた方法をレベル3の保型関数  $f$  で、無限遠点のカuspで1位のゼロ点、有理点0で1位の極をもつものから3進的保型形式を構成したい。これを  $f$  のべき級数として展開したときの3進整数の3進位数が簡単な公式をもつことを予想している。その予想の公式を証明することが、今後の研究課題になっている。2進的保型形式では、現れなかった現象に有効と期待されるその証明のアイデアは、他のレベルのマッカー・トンプソン級数の場合にも適用可能であると期待している。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① M. Koike, On 2-adic modular forms, Kyushu J. Math., 査読有、掲載決定
- ② M. Koike, Congruences between extremal modular forms and theta series of special types modulo powers of 2 and 3, Kyushu J. Math., 63, 123-132, 2009, 査読有

[学会発表] (計3件)

- ① 小池 正夫, 2進的な保型形式について、ミニ研究集会「代数的組合せ論」、2009年3月18日、九州大学
- ② 坂内 英一, On the late work of D. G. Higman on combinatorics and groups, Finite groups, vertex operator algebra and combinatorics, 2009年1月9日、京都大学数理解析研究所
- ③ M. koike, Congruences between extremal modular forms and theta series of special types modulo powers of 2 and 3, East Asia Number Theory Conference, 2008年1月22日, Kaist, Daejeon, Korea