様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　４　月　１１　日現在

機関番号：61020
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2007～2010
課題番号：19540042
研究課題名（和文）　非結合的代数系からの数理物理学への応用

研究課題名（英文）　A study of nonassociative algebras and mathematical physics

研究代表者
神谷　徳昭（KAMIYA NORIAKI）
会津大学・コンピュータ理工学部・教授
研究者番号：90144691

研究成果の概要（和文）：
非結合代数系からのＧ（３）,F(4)　Ｄ（ｍ，ｎ）型の構成が端的な概要です。
この構成は数理物理学と非結合的代数学の融合分野の研究です。それは歴史的に述べれば１９世紀の末のカルタン、キーリング，フルビッツに起源をもつと考えます。勿論現代の数学として４元数、８元数、交代代数、ジョルダン代数の立場からルート系を用いないジャコブソン的な構成方法でフロイデンタールの伝統をうけつぎながら幾何学とリー代数に特に超リー代数の特徴ずけです。三項系代数系の分類とパース分解と南部恒等式の特徴を研究しました。

研究成果の概要（英文）：
A study of construction of G(3),F(4) D(m,n) from triple systems.
This construction is a mixed field of nonassociative algebras and math. Physics..
Historicaly speaking, we think that the origin is from Cartan Killing,Freudenthal, Jacobson etc. Our methods are a methods of means in without root system using.
That is ,A classification of triple systems and Peirce decomposition, Nambu identity relations had considered.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数学、数物系科学
科研費の分科・細目：数学　代数学
キーワード：リ—環論，　三項系代数

１．研究開始当初の背景
リー環論の研究がキーです。
(1)物理学者が我々の代数系（三項系と呼ばれるもの）に興味を持ちクオーク模型の数学の理論的な要請が存在したため。
(2)リー代数の構造をルート系より調べるのではなくリー超代数の構造を三項系の立場から同時に研究する必要性が生じたため。
(3)上記のことはフェルミオン，ボーズオン粒子を自然界の現象として同時に、同質的に把握する必然性のため。
(4)自己完結的な代数構造（単純三項系の分類）を探求するため。
(5)世界中の数学者たち、フィールド賞受賞者の Zelmanov(USA), 仁科賞受賞者の Okubo,(USA),Neher(Canada), Mondoc,(Sweden)Elduque,(Spain)教授等との共同研究および国際研究会開催の準備的会合のた

め。
以上が基本的な背景です。三項系代数により物理学の現象を解明することが目的でありそのために論文執筆と国際学会に参加し各国の数学者の人たちと交流を図るための旅費申請のため。

２．研究の目的

論文執筆と研究会発表が主です。

(1)ベクトル空間 V が内積を持つとき，<xyz>:= <y,z>x, <x,y>∈係数体 K によって，我々の三項演算が定義できる．又８元数代数の虚部の７次元ベクトル空間 Im(０)(０は８元数)は，二項演算で閉じていないが，三項演算では代数系として閉じている．この点が独創的，及びオリジナルな点である．その結果として，simple Lie algebras の root 系を用いない構成(J.Alg. 1987, Comm Math. Sancti Pauli 1989, Comm. Alg.2002,etc.)を研究した．私のライフワークである三項系代数の立場から，数学の色々な場面に登場する、リー代数，ジョルダン代数，それらのスーパー代数の構成(J.Alg.2005, Proc. Edinburgh Math. 2000, Proc. Edinburgh Math. 2003, Comm.Alg.2003,Bull Aust.Math.2004, etc.)を考察している．

(2)この研究計画では，単純ジョルダン超代数の構成を Jordan-Lie 三項系(J.Alg. 1997,2005)の立場から，具体的にリー代数の構成に現われるリー三項系と同様に研究し，そして我々の三項系の単純の分類とパース分解も行いたいと考えています． California University の Zelmanov 教授(1994 年フィールズ賞受賞)も nonass. algebra における結果を用いて，群論の Burnside 問題を解く key word としている．このことからも理解されるように，我々の nonass.alg.の手法が他の分野に役立つので，その計画として，Lie superalgebras, Kac-Moody algebras, Jordan superalgebras の三項系による数学的構成についての物理からの要請に答えたい.

(3)詳細に述べれば、2003 年(Edinburgh Math.),2005 年(J.Alg.)の論文等で仁科賞受賞者の大久保進氏と U=Im O に(-1,-1)-F-K.t.s.の三項系構造が入り,T=Im O + Im O に anti Lie triple system が構成され,L(T)=Der T + T として,31 次元の simple Lie superalg.G(3)が root 系を用いず,フェルミニオンの一般的性質が次数のスーパー化を用いずに構築できました。これの Peirce 分解を考察するのがこの研究課題の主目的である.つまり quark theory と密接な関係がある三項系の分解の更なる考察が主目標となる.つまり我々の目的は,物理学(特に素粒子論研究)より数学者への概念的問いかけへの回答を与えることが目的である.

(4)標数０の代数閉体上の semi simple Lie algebra lgebra ｇにおいては，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-2}+\mathfrak{g}_{-1}+\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$，$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]\leqq \mathfrak{g}_{i+j}$なる分解が存在する．$\mathfrak{g}_1$なるベクトル空間を代数系という立場から考察すると，二項演算では閉じていないが，三項演算(triple product)の考えにおいて閉じている．そしてこれは対称空間の概念と密接に関連する．

Jordan triple systems の拡張と見なせる Freudenthal-Kantor triple system(F.K.t.s.)という concept に到達する．この点が独創的な点である．海外共同研究者(Okubo, Neher, Elduque, Kantor)との共同の結果が得られれば，数理科学におけるこの分野の飛躍的な特色ある発展が考えられる．予想される結果は，三項系を用いた代数系によるリー超代数とジョルダン超代数の具体的構成であり，これが有益な意義である．例外リー環を構成・表現する root 系, Cartan matrix による Cartan, Weyl, Kac, Moody(無次元版として)etc. による流れがある．一方，Jordan algebra に関連した方向として，Jacobson, Chevalley, Freudenthal, Kantor によるＧ$_2$，Ｆ$_4$とＥ$_6$，Ｅ$_7$，Ｅ$_8$の construction が存在した．Jacobson の研究の流れとして，三項系から Lie algebra，もっと一般に Lie superalgebra, Kac-Moody algebras, Jordan superalgebras を構成・研究したい．最近の国内外の関連する研究は，Zelmanov(Jordan superalg.),Kaji(代数幾何)，Kaneuki, Bertram(対称空間)，Neher(GK dimension)，大久保(Yang-Baxter)，Bahturin(Lie superalg.)，Kantor(Jordan, Lie superalgebra),Nomura, Ishi(等質空間)等，多数の研究者達が存在する．Zelmanov, Neherにより，Jordan超代数のGK-次元が考察されている．この代数系の一般化であるF.K.t.s.において，NeherとGK-次元の共同研究を行う予定である．スペインのElduque教授(2001年9月来日)，U.S.A.の大久保教授(2005年５月来日,筆者も2006年３月Rochester Univ.を共同研究の為訪問),筆者とで，(-1,-1)-balanced F.K.t.s.の分類とリー超代数 G(3)，F(4)，B(m,n),D(m,n)の分類の対応を2005年9月より共同研究で着手しており，一部論文を投稿中である.その為にもこの研究費が必要である．又スェーデンの Mondoc教授とF.K.t.s.のパース分解を2006年より共同研究中であり，以上をこの研究計画の４年間に完成させたい．2003年メキシコ(筆者も組織委員)，2004年スウェーデン，2005年カナダ，2005年ブルガリア(数理物理学)等の，筆者も参加した非結合的代数系の国際学会が頻繁に開催され，日本においては小人数であるが，ロシア，南米，カナダ,U.S.A.,ヨーロッパの各地の大学では研究者が増加しつつある．リー代数・リー超代数が物理の分野へ応用されることから，この研究の位置ずけが理解されるように，その部

分空間への三項系による特徴ずけは，種々の数理分野に応用できると考えられます．目標(独断的に述べれば，次の研究目的を持つ．)

$\boxed{\text{数理物理学}}$＋$\boxed{\text{非結合的代数系}}$＝$\boxed{\text{数理代数学}}$

（Mathematical Scientific algebra）の完成です。数理代数学という名称は筆者により，名ずけられた非結合的代数系の理論物理学への応用を意識したconceptであります(自分で私の学問体系のconceptを述べるのは少し気がひけますが，申請の為に宣伝します.)． リー超代数F(4)のExtended Dynkin diagramを考察します(我々の考えの一端の表明です)．この構造を特徴ずけます.この三項系Uは,物理的な応用を持つと考えられます.つまり,りー代数のフロイデンタール三項系の拡張と未来への統一理論の一考察と考えます.予見で述べれば,それは弱い力,強い力,重力場,電磁力などの超統一理論に向かう応用と思えます.

最後に物理学者がこの三項系に興味を持ち,2007 年より発刊される雑誌の Editorial Board に筆者を数学の分野の編集者として参加要請された(N.Y.市立大物理、Yale Univ.,パリ大学等を中心とした).この雑誌以外にも,Sweden Lund Univ., Estonia,Talin Univ. の人達が中心となる数理物理とリー代数の一般化の雑誌の Editorial Board の一員でもあります.２つの雑誌が筆者の分野(非結合的代数系)に関連して創刊される予定である.これらのことからもこの分野の将来性と重要性が認識されると考え,筆者らの課題の方向性が未来志向の学問であることが理解されると考えます． このような研究目的をもちますので,この研究費を申請したいと考えています.

３．研究の方法

国際会議参加と招聘共同研究

研究代表者(神谷)は例外リー環及び Kac-Moody algebra を三項系の立場から,特に Freudenthal-Kantor triple systems の理論(例 J.Alg. 1987 年の論文，1993 年，非結合的代数系の国際会議録., Kluwer Academic, 1998 年, Bull Polish Math.の論文)より構成する.一般的には， Freudenthal-Kantor triple systems の理論物理への応用範囲について研究する． 2000 年,2003 年の Proc. Edinburgh Math.の論文により， 三項系から Lie superalgebra を構成した. 2001 年の Bull Polish Math.の論文において,単純例外リー代数を三項系の種々の type 別により，11 通りの構成を示した． 2002 年パリ,数理物理学会論文集,Comm. in Alg.2002 であるが，合成代数(非結合的代数系)の三項系版を研究した.2003 年以後 10 数編の論文については,報告集にて述べています.

平成 19 年度 1. 可換又は巾零な三項系を用いた代数系より Yang-Baxter equation の解を与える．2． Jordan super algebras を triple systems の standard embedding として構成する. つまり, Lie superalgebra construction と同様に考察する(Kac の 10 次元 Jordan superalgebra の構成)．研究業績(イタリアの雑誌)の続編を論及する．3．単純な balanced (-1,-1)-Freudenthal-Kantor triple system の分類の研究を行う． Elduque(スペイン)，大久保(U.S.A.)，筆者による三人の共同論文執筆中，つまり，2001 年９月には Elduque 教授が一週間福島県立 会津大学に滞在し，打ち合わせを行った．又 2006 年スペイン学会の折討論した.この研究の続きの為，スペインを訪問する旅費を申請する． 2005 年 J.Alg. にて一部出版した.又 2003 年 Glasgow J.Math.においても発表した.4． 2007 年ブルガリアで開催される数理物理学の国際会議参加を計画している.「巾零な一般的 Freudenthal-Kantor triple system とそのヤン・バクスター方程式への応用」という題名で，論文発表を準備中である．5． Jordan スーパー代数の三項系代数の super derivation をもとにした構成(2003 年エジンバラの数学雑誌,2004 年のオーストラリアの雑誌の論文,イタリアの雑誌， etc.)の具体的実現の続編を考察する．6． カナダ，オタワ大学の Neher 教授とゲルファント・キリロフ次元(GK dimension)の Freudenthal-Kantor 三項系とそれに付随するリー代数及び，スーパー代数の次元の対応関係を共同研究する．彼と 2001 年６月，カナダの St. Johns University の学会の折，又 2005 年トロント大学フィールズ研究所での一部共同研究を続行の為と彼を日本に招聘する．平成 20 年度以降(平成 20 年～22 年度)1． 最近，Lund University (Sweden)の Daniel 教授より，symmetric space の一般化である generalized symmetric space についてのプレプリントが送られてきた．そこで我々の triple system が役に立つことが指摘されている．それ故，彼との共同研究を考えている．特に，パース分解について e-mail で手紙のやりとりをしているので，直接の討論の為，彼を招聘する計画です． 2． ロシアのノボシビルスク Univ.Schestakov 教授 (Zelmanov と共著論文あり)より,我々の三項系の論文別冊の要求があった(2000 年からブラジルに長期滞在)． Jordan algebra と alternative alg.が関係するので，我々の概念による三項系で拡張できるのではないかと考えられる(現在，e-mail 等で共同研究の可能性を追及中).彼との共同研究を計画中である. 3． 理論物理学との境界領域が我々の分野 (nonass. alg. triple system)と密接に関係しているので， ３ヶ年計画(平成 20 年から平成 22 年)で，外国出張・外国からの招聘を継続的に

希望する．4． Algebras, Goups and Geometries という雑誌の Editor をしているので，その関連分野の人達と接触し，意見交換・研究討論をする予定である．その為に，国内外の旅費が必要であると考える．2007 年より新しい雑誌の編集者予定です.5． 各種の国際会議の主催者として，各国の研究者との交流を計画中である(例えば，前回の科学研究費旅費で，2003 年メキシコ，2005 年５月カナダ，2006 年８月スペインに出張した)．7． 数学固有の理論形成と外部の科学分野（学際領域への発展）との交流・接触を考えている．8. 国内外の研究会・学会に参加・発表を行う．　この４年間の科学研究費により，独断的，宣伝的に述べることを許していただけるならば，数理代数学 という研究分野を確立する基礎概念・理論(勿論，研究成果は少しずつ種々の雑誌及び研究会等で発表している)の完成を目標としている．その為の国内外の旅費を主に申請する．この４年間(平成 19 年～22 年度)の研究費で，この三項系代数という concept の拡大を試みる.例えば， リー代数 F_4 に関して述べれば， F_4 ． $\alpha = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_2 + 2\alpha_4$ なる Extended Dynkin diagram におけるリー代の分解 $g = g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2$ の重復度２の roots α_1 ($\dim g_{-1} = \dim g_1 = 8$, $\dim g_{-2} = \dim g_2 = 7$)と α_4 ($\dim g_{-1} = \dim g_1 = 14$, $\dim g_{-2} = \dim g_2 = 1$)による Characterization($g_1$ に三項積を導入して，代数構造を研究する)を考察し, その成果を他の数理科学の分野に応用することを準備・計画中である．特にこれのリー超代数の立場への応用・一般化を考察する．又，代数幾何学へのフロイデンタール多様体と呼ばれるものへの応用も準備している．このように，リー代数の分解についてはほぼ解明できたので，リー超代数の場合，特に G(3)，F(4)，D(2,1; α)について拡大 Dynkin 図形と三項系（すなわち Balanced (-1,-1)-フロイデンタール・カントール三項系）の関係を Elduque, Okubo, 筆者で考察し，一部共著のプレプリントが完成しつつある．単独での仕事としてはパース分解を研究中である.以上が過去の研究経過・成果・準備状況です．歴史的な背景を少し述べさせていただきます．　４元数，８元数の概念は，ハミルトン(Hamilton)，ケーリー(Cayley)により，19 世紀後半にイギリスで生まれ，その後非結合的代数系はアメリカのシカゴ大学，イエール大学で大いに活発に研究された分野です. 1930 年代プリンストン大学のウェダーバーン(Wederburn)の弟子であり，ワイル(Weyl)のリー群の講義を聞いたジャコブソン(Jacobson)は長くイエール大学の教授を務め，リー代数，ジョルダン代数の弟子を多数育てました．そして又，その後継者として考えられているロシア生まれのツェルマノフ(Zelmanov)も，現在カリフォルニア大学の教授として非結合的代数系の研究者です．　一方，ロシアのノボシビルスク大学のマルチェフ(Malcev)によっても，1950 年以後この非結合的代数の分野は発展され，現在その弟子達が，世界中で活躍しています．2003 年７月メキシコ(国際会議 Science committee メンバー)，2005 年５月カナダのトロント大学フィールズ研究所(招待講演)において，世界中の非結合的代数系の数学者が，MacCrimmon(ジョルダン代数)，Neher(ジョルダン三),Allison(リー代数)等を中心として，国際会議が開催され，筆者も参加し，交流を活発に行っています．これらの研究活動・準備状況の基で，彼らとの共同研究・共同国際会議を遂行したいと考えています．又 2006 年８月にはスペイン Oviedo 大学で約 200 人のこの分野の国際会議が Kac,Zelmanov 等の参加のもとで行われ,申請者も参加した.つまり，我々はこれらの歴史的背景・準備状況を拡大・発展させて，次のことを目標としています． 非結合的代数系(三項系代数)による数学・物理学の(特徴ずけ)．　筆者の友人でもあるフィールズ賞受賞(1994)の Zelmanov 教授と共同で国際会議の準備．　II. 我々の研究は純粋に基礎的理論なので，研究代表者はコンピュータ理工学部に所属していますが，このような申請課題で科学研究費補助金以外の研究費は過去に受けたことがありません．しかしコンピュータ科学者を分担者に含め,社会への還元・地域貢献はいつも心がけています．

４．研究成果

論文出版と報告集作成

Plan,（計画） Do,（実行） Results （行動結果）この三段階で述べれば最終行動報告の結果としては純粋理論の数学構築が目標成果である。つまり以下のことをこの研究費で達成したと考えます。イ)研究論文の着手と完成共同研究会、ロ)共同研究遂行と実践ハ)社会への貢献、普及.特にハ）についてはクオーク模型の数学的理論形成を一般の人に説明する、可視化するその普及活動は公開講座、公開授業が考えられる。会津学鳳中学生（３００名）に役に立つ数学という題で授業をさせていただいた。また数学史的観点から神奈川県の中、高の先生方の研究会（８０名）で講演した。市域の公開講座としてはブルガリアの日本大使であるセンドフ教授によるブルガリアの数学教育という題名で市民フォーラム（５０名）を主催した。それ以外にも市民のための座学的会合に招かれ普及に努めている。ロ）についてはスエ―デンの国際学会（２０１０）ルーマニア（２０１１）の国際幾何学ワークショップ、韓国ＫＩAS（２０１１）にて招待講演等（予定も含む）が存在し共同研究者たちとオーガナイザーの一

員として貢献させていただいています。イ）についてはこの最近の４年間で国際的なレフリー付の海外の雑誌に数編の論文が印刷され、京都大学数理研講究録および日本学士院紀要に速報的に発表し、公表されています。これについては主な発表論文等項目参照してください。以上が研究成果であるが国内外の国際学会参加と論文執筆がこの研究費での基本的な目的として申請した主旨に合致していると考えます。
最後に社会への貢献のために、未来への科学の知見を発明、発見、発展させるためにささやかながら成果が得られたと自負しています。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）すべて査読ありのものです

1. N.Kamiya, A structure theory of (-1,-1)Freudenthal-Kantor triple systems, Bull.Austrian Math.vol.81,2010,p132-155
2. N.Kamiya, On anti-structurable algebras and Dynkin diagrams, JGLTA,vol.3 no 3p183-190.
3. N.Kamiya, A new class of nonassociative algebras with involution, Proc.Japan Acad.2008, p68-72
4. N.Kamiya, RIMS koukyuroku 1655,p.56-65, 2009
5. N.Kamiya, RIMS koukyuroku 1712,p10-20,2010
6. N.Kamiya, RIMS koukyuroku 1677,p253-260 2009
7. N.Kamiya, RIMS koukyuroku 1604,p110-114, 2008
8. N.Kamiya, RIMS koukyuroku 1562,p.1-10, 2007

〔学会発表〕（計８件）

1. 神谷徳昭、(¥alpha,¥beta,¥gamma)triple systems、数理解析研究所研究集会、2011年、kyoto Univ.
2. 神谷徳昭、On anti-structurable algebras、数理解析研究所研究集会、2010年、kyoto Univ.
3. 神谷徳昭、Triple systems and Lie algebras、AGMP(ALGEBRA and Geometry ,Math. Phy)6、2010年10月、ヨーテボリ大学（スウェーデン）
4. 神谷徳昭、パスカルの三角形と和算、数理解析研究所研究集会、2009年、京都大
5. 神谷徳昭、合成代数とピタゴラスの定理の拡張、数理解析研究所研究集会、2008年、京都大
6. 神谷徳昭、三項系からの幾何学の特徴ずけについて、Noncommutative Geometry Conference，ベルギー
7. 神谷徳昭、リー超代数とデインキン図形、数理解析研究所研究集会、2007年、京都大
8. 神谷徳昭、三項系とデインキン図形、ＡＧＭＰ、2007年、ヨーテボリ大学（スウェーデン）

６．研究組織
(1)研究代表者

神谷　徳昭（Kamiya Noriaki）
会津大学・コンピュータ理工学部・教授
研究者番号：90144691

(2)研究分担者

鈴木　大郎（Suzuki Taro）
会津大学・コンピュータ理工学部・准教授
研究者番号：90272179

森　和好（Mori Kazuyoshi）
会津大学・コンピュータ理工学部・上級准教授
研究者番号：20252322